Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Université Paris Cité

Licence 3ème année, Transformée de Fourier et Applications 2022-2023

Examen du 04/05/2023

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Total : 26.25 = 7.75 + 9.25 + 9.25

Exercice 1 (7.75pt)

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition d'un multiplicateur de Fourier de ℓ_N.

b) Que dire de la composée de deux multiplicateurs de Fourier de ℓ_N ?

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = 3z(n) + (1 - 2i)\, z(n - 1) - z(n - 2) + (1 + 2i)\, z(n - 3).$$

a) Que peut-on dire de l'opérateur T ? Justifier.

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$ et tracer le spectre d'amplitude de $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Diagonaliser A dans la base de Fourier.

e) Décrire l'effet fréquentiel du filtre T ?

3. Soit $C_a : \ell_4 \to \ell_4$ l'opérateur de convolution par $a = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

a) Calculer $\hat{a}$. *Indication : on pourra chercher au préalable à exprimer a en fonction d'un des éléments de la base $\mathcal{E}$ des exponentielles complexes de ℓ_4.*

b) Que vaut alors $C_a \circ T$?

<u>Correction</u>.
Total : <u>7.75</u> = (0.5 + 0.5) + (0.75 + 1.75 + 1 + 0.75 + 0.5) + (1 + 1).

1. a) Soit $\omega \in \ell_N$. Un opérateur $T_\omega : \ell_N \to \ell_N$ est un multiplicateur de Fourier par ω, si $T_\omega = \mathrm{IDFT} \circ M_\omega \circ \mathrm{DFT}$, où $M_\omega : \ell_N \to \ell_N$ est l'opérateur de multiplication par ω i.e. pour tout $z \in \ell_N$, $M_\omega(z) = \omega \cdot z$ (0.5pt).

b) Soit $\omega, \tilde{\omega} \in \ell_N$ et soit $T_\omega, T_{\tilde{\omega}}$ les multiplicateurs de Fourier associées. Alors $T_\omega \circ T_{\tilde{\omega}} = \mathrm{IDFT} \circ M_\omega \circ \mathrm{DFT} \circ \mathrm{IDFT} \circ M_{\tilde{\omega}} \circ \mathrm{DFT} = \mathrm{IDFT} \circ M_\omega \circ M_{\tilde{\omega}} \circ \mathrm{DFT}$. Comme $M_\omega \circ M_{\tilde{\omega}} = M_{\omega \cdot \tilde{\omega}}$, $T_\omega \circ T_{\tilde{\omega}}$ est donc également un multiplicateur de Fourier, cette fois par $\omega \cdot \tilde{\omega}$ (0.5pt).

> C'est logique puisque appliquer $T_{\tilde{\omega}}$ a pour action de multiplier par $\tilde{\omega}$ dans le domaine de Fourier, donc appliquer par la suite T_ω va à nouveau multiplier en Fourier le résultat par ω. Cela revient donc bien finalement à multiplier par $\omega \cdot \tilde{\omega}$.

2. a) On a $T = 3R_0 + (1-2i)R_1 - R_2 + (1+2i)R_3$, i.e. T s'écrit comme une somme d'opérateurs de translation, donc T est un opérateur stationnaire puisque commute nécessairement avec tout opérateur de translation R_k, $k \in \mathbb{Z}$ (0.75pt).

b) On a $h = T(e_0)$, donc $h = (3, 1-2i, -1, 1+2i)$ (0.5pt).
En calculant les coefficients de Fourier de h, on vérifie que $\hat{h} = (4, 0, 0, 8)$ (1pt).
0.25 pour le spectre d'amplitude

c) Comme T est un opérateur stationnaire, on sait que sa matrice dans la base canonique est une matrice circulante (0.5pt).
La matrice A est donc circulante et sa première colonne est donnée par h. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i & -1 & 1-2i \\ 1-2i & 3 & 1+2i & -1 \\ -1 & 1-2i & 3 & 1+2i \\ 1+2i & -1 & 1-2i & 3 \end{pmatrix}. (0.5pt)$$

d) Comme T est un opérateur stationnaire, c'est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$, i.e. $T = \text{IDFT} \circ M_{\hat{h}} \circ \text{DFT}$. Ainsi $A = W_4^{-1} D W_4$, où W_4 est la matrice de l'opérateur DFT et D la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}. (0.75pt)$$

e) T est un filtre passe-bas car les coefficients 1 et 2 de $\hat{h}$ sont nuls (0.5pt).

3. a) On a $\mathcal{E}_2 = (1, -1, 1, -1)$, donc $a = \frac{1}{4}\mathcal{E}_2$ (0.5pt). Par conséquent, comme $\hat{a} = (\langle a, \mathcal{E}_m\rangle)_{0\leqslant m\leqslant 3}$, par orthogonalité de la base $\mathcal{E}$, on obtient $\hat{a} = \frac{1}{4}\left\|\mathcal{E}_2\right\|^2 e_2 = e_2 = (0, 0, 1, 0)$ (0.5pt).

b) Comme C_a est un opérateur de convolution, c'est donc également un multiplicateur de Fourier par $\hat{a}$ (0.5pt). Ainsi $C_a \circ T$ est un multiplicateur de Fourier par $\hat{a} \cdot \hat{h} = (0, 0, 0, 0)$, d'après la question 1.b). C'est donc l'opérateur nul (0.5pt).

> T ne garde que les fréquences 0 et 3 d'un signal, alors que C_a ne conserve que la fréquence 2. Il est donc logique que $C_a \circ T = 0$.

Exercice 2 (9.25pt)

Soit $\tilde{f} : t \in [0, \pi] \mapsto \frac{1}{\pi^2}(t-\pi)^2$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction obtenue à partir de $\tilde{f}$ par prolongement par parité, puis par prolongement 2π-périodique.

1. a) Représenter graphiquement f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
   b) Donner l'expression de f sur $[-\pi, 0]$.
2. Pour les théorèmes de convergence d'une série de Fourier suivants :
   i) *théorème de Parseval,* ii) *théorème de convergence normale,* iii) *théorème de Dirichlet,*
   dire s'ils s'appliquent ou non à f, en justifiant brièvement.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{2}{\pi^2 n^2}$.
   b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de la somme partielle (d'ordre N) de la série de Fourier de f, notée $S_N(f)$, de sorte à obtenir une expression ne faisant intervenir que des quantités réelles.
5. a) Que valent $a_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?
   b) Retrouver alors l'expression de la question 4..
6. Justifier que $S_N(f)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Correction.
Total : 9.25 = (1 + 0.25) + 1.5 + (2 + 1.75) + 0.75 + (0.75 + 0.5) + 0.75.

1. a) $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, vaut 1 en 0, $\tilde{f}'(0) = -\frac{2}{\pi} < 0$ et $\tilde{f}'(\pi) = 0$. Voir Figure 1 pour la représentation graphique de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

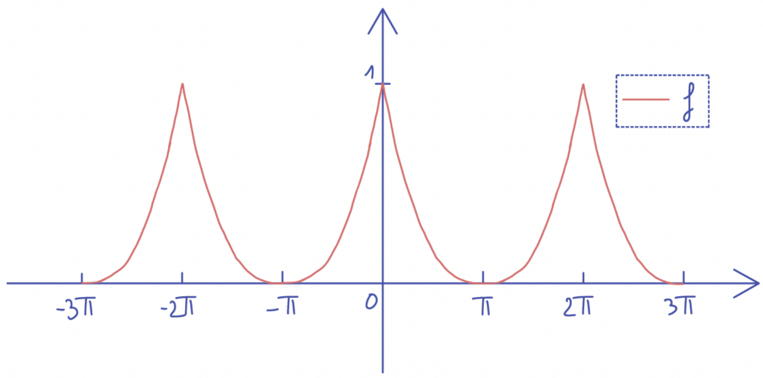

FIGURE 1. Représentation graphique de la fonction f donnée dans l'exercice 2.

0.5 allure $\tilde{f}$, 0.25 parité, 0.25 périodicité

b) On a pour tout $t \in [-\pi, 0]$, $f(t) = f(-t)$ par parité de f, donc $f(t) = \frac{1}{\pi^2}(-t-\pi)^2 = \frac{1}{\pi^2}(t+\pi)^2$ (0.25pt).

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, elle est donc dans $L^2_p(0,2\pi)$ et ainsi le théorème de Parseval s'applique (0.5pt).

La fonction f est de plus $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de convergence normale s'applique puisque f est donc continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (et 2π-périodique) (0.5pt).

En tant que fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut également appliquer le théorème de Dirichlet à f (0.5pt).

3. a) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \text{ (0.25}pt) \\ &= \frac{1}{2\pi^3}\left(\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)^2e^{-int}dt + \int_0^{\pi}(t-\pi)^2e^{-int}dt\right). \end{aligned}$$

Or $\int_{-\pi}^0 (t+\pi)^2e^{-int}dt = \int_0^\pi (s-\pi)^2 e^{ins}ds$ par le changement de variable $s=-t$ (0.25pt). On a donc juste essentiellement à calculer $\int_0^\pi (t-\pi)^2e^{-int}dt$, puis remplacer n par $-n$ pour trouver l'autre l'intégrale.

Par double intégration par partie, on trouve

$$\int_0^{\pi}(t-\pi)^2e^{-int}dt = \frac{\pi^2}{in} - \frac{2\pi}{(in)^2} - \frac{2}{(in)^3}\left((-1)^n - 1\right). \text{ (1}pt)$$

On a donc $\int_{-\pi}^0 (t+\pi)^2e^{-int}dt = -\frac{\pi^2}{in} - \frac{2\pi}{(in)^2} + \frac{2}{(in)^3}\left((-1)^n-1\right)$ (0.25pt), d'où

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi^3}\left(-2\frac{2\pi}{(in)^2}\right) = \frac{2}{\pi^2 n^2}. \text{ (0.25}pt)$$

b) On a d'après l'identité de Parseval, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt$ (0.5pt).
Or $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt$ par parité de f, et donc $c_0(f) = \frac{1}{3}$ (0.25pt).
De plus $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(t)|^2dt = \frac{1}{5}$ (0.25pt).

Comme pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_{-n}(f) = c_n(f)$ (0.25pt), on a finalement

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^4 n^4} = \frac{1}{5},$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (0.5pt).

4. On a par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$ (0.25pt), ainsi

$$S_N(f)(t) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(e^{int} + e^{-int}\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nt)}{n^2}.$$

grâce de nouveau à la symétrie pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_{-n}(f) = c_n(f)$ (0.5pt).

5. a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$, d'où $a_0(f) = \frac{2}{3}$ et $a_n(f) = \frac{4}{\pi^2 n^2}$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ (0.5pt). Puis comme f est ~~impair~~ pair, on a $b_n(f) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (0.25pt).

   b) D'après l'expression de $S_N(f)$ en fonction des coefficients de Fourier réels, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S_N(f)(t) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right), \ (0.25pt) \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos(nt). \ (0.25pt) \end{aligned}$$

   On retrouve donc bien l'expression de $S_N(f)$ trouvée précédemment.

6. On sait que le théorème de convergence normale s'applique, puisque f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ (et 2π-périodique), donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(t) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$. C'est le cas en particulier lorsque $t = 0$ (0.5pt).

   On a donc $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (0.25pt).

Exercice 3 (9.25pt)

1. Rappeler la définition de la transformée de Fourier et montrer la propriété de translation.
2. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$ et démontrer ce résultat.

   b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de $L^2_p(0, 2\pi)$. Énoncer, puis démontrer une condition nécessaire et suffisante, impliquant les coefficients de Fourier de f, pour que f soit à valeurs réelles.

   c) On considère cette fois la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique représentée Figure 2 sur une seule période. Justifier la convergence ponctuelle de la série de Fourier de f, puis donner $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(t)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'en fonction du contexte, on peut identifier tout élément $z \in \ell_N$ à un vecteur de $\mathbb{C}^N$, mais également à une matrice colonne à N coefficients.

   a) Donner la définition des opérateurs DFT et IDFT sur ℓ_N.

   b) Montrer que pour tout $z \in \ell_N$, $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\hat{z}) = z(N-\cdot)$. *Indication : on pourra démontrer cette relation en utilisant la matrice de l'opérateur DFT dans la base canonique, puis se souvenir que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = \overline{\overline{\alpha}}$.*

   c) Trouver et démontrer une expression similaire pour $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}\left(\overline{\hat{z}}\right)$, pour tout $z \in \ell_N$.

   d) Soit $z \in \ell_N$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $\hat{z}$ soit à valeurs réelles.

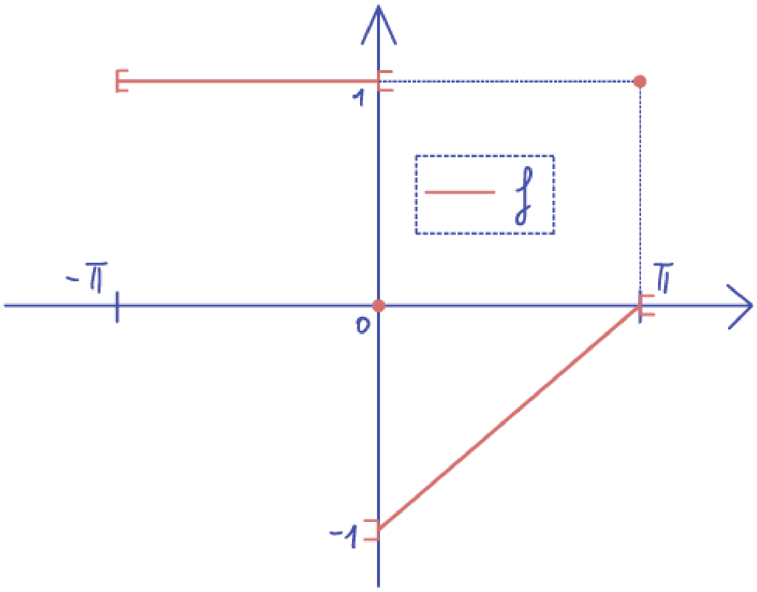

FIGURE 2. Représentation graphique de la fonction f de l'exercice 3, question 2.c). On a $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1$.

e) Application. On suppose dans cette question que $N = 3$. Donner la matrice W_3. Soit $z = (2, 1 - i, 1 + i) \in \ell_3$. Que peut-on alors dire de $\hat{z}$? On justifiera dans un premier temps sans faire le calcul direct de $\hat{z}$, puis dans un second temps on retrouvera ce résultat en calculant $\hat{z}$.

Correction.
Total : 9.25 = 0.75 + (0.75 + 1 + 1.75) + (0.5 + 1.25 + 0.75 + 0.75 + 1.75).

1. L'opérateur de transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est défini pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$ par : pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ (0.25pt).

On a pour tout $b \in \mathbb{R}$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f(\cdot - b))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-b)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega(u+b)}dt = e^{-i\omega b}\mathcal{F}(f)(\omega)$ (0.5pt).

2. a) On a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = (in)c_n(f)$. Il suffit d'effectuer une intégration par partie en intégrant f' et dérivant $t \mapsto e^{-int}$ (0.75pt).

b) On a f est à valeurs réelles si et seulement si $f = \overline{f}$, i.e. ssi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(\bar{f})$ (le sens direct est trivialement vrai, le sens indirect est vrai par injectivité de l'application qui a une fonction de $L^2_p(0, 2\pi)$ associe ses coefficients de Fourier). Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$. Ainsi f est à valeurs réelles si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$ (1pt).

c) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π périodique, donc le théorème de Dirichlet s'applique : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(S_N(f)(t))_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec f continue en t, la suite converge vers $f(t)$ (0.75pt).
On a

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(t) = \begin{cases} 1 = f(t), & \text{si } t \in]-\pi, 0[, \\ f(t) = \frac{t}{\pi} - 1, & \text{si } t \in]0, \pi[, \\ 0 = f(0), & \text{si } t = 0, \\ \frac{1}{2} \neq f(\pi), & \text{si } t \in \{-\pi, \pi\}. \text{ (1pt)} \end{cases}$$

3. a) On a pour tout $z \in \ell_N$, $\mathrm{DFT}(z) = \hat{z} \in \ell_N$, où pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\hat{z}(m) = \langle z, \mathcal{E}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2i\pi\frac{mn}{N}}$.
Et $\mathrm{IDFT}(z) = \check{z}$, où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\check{z}(n) = \frac{1}{N}\left\langle z, \overline{\mathcal{E}_n}\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} z(m)e^{2i\pi\frac{nm}{N}}$ (0.5pt).

b) Soit $z \in \ell_N$. La matrice de DFT dans la base canonique de ℓ_N est W_N. Donc $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\hat{z}) = \frac{1}{N}W_N\hat{z} = \overline{\overline{\frac{1}{N}W_N\hat{z}}} = \overline{\frac{1}{N}\overline{W_N}\,\overline{\hat{z}}}$. Or on sait que $W_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{W_N}$ (car $\frac{1}{\sqrt{N}}W_N$ est une matrice unitaire). De plus $\overline{\hat{z}} = \widehat{\overline{z}}(N-\cdot) = \mathrm{DFT}(\overline{z}(N-\cdot)) = W_N\overline{z}(N-\cdot)$. Ainsi $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\hat{z}) = \overline{W_N^{-1}W_N\overline{z}(N-\cdot)} = \overline{\overline{z}(N-\cdot)} = z(N-\cdot)$ (1.25pt).

c) Soit $z \in \ell_N$. En utilisant la même méthode, on obtient $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\overline{\hat{z}}) = \frac{1}{N}W_N\overline{\hat{z}} = \overline{\overline{\frac{1}{N}W_N\overline{\hat{z}}}} = \overline{W_N^{-1}\hat{z}} = \overline{z}$ (0.75pt).

d) On a $\hat{z}$ à valeurs réelles si et seulement si $\hat{z} = \overline{\hat{z}}$, donc ssi $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\hat{z}) = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\overline{\hat{z}})$ (puisque DFT est un isomorphisme), donc d'après les questions précédentes ssi $z(N-\cdot) = \overline{z}$ (0.75pt).

e) En notant $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et en remarquant que $\overline{j} = j^2$, on a donc

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}. \ (0.75pt)$$

On a $z(3-0) = z(0) = 2 = \overline{z}(0)$, puis $z(3-1) = z(2) = 1+i = \overline{z}(1)$ et enfin $z(3-2) = z(1) = 1-i = \overline{z}(2)$. Donc z satisfait la condition donnée à la question précédente, d'où $\hat{z}$ est à valeurs réelles (0.5pt).

On trouve par le calcul $\hat{z} = W_3 z = (4, \sqrt{3}-2, \sqrt{3}+1)$ et donc on retrouve bien que $\hat{z}$ est réel (0.5pt).