Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, Transformée de Fourier et Applications 2022-2023

Examen du 04/05/2023

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition d'un multiplicateur de Fourier de ℓ_N.

b) Que dire de la composée de deux multiplicateurs de Fourier de ℓ_N ?

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = 3z(n) + (1 - 2i)\, z(n-1) - z(n-2) + (1 + 2i)\, z(n-3).$$

a) Que peut-on dire de l'opérateur T ? Justifier.

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$ et tracer le spectre d'amplitude de $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Diagonaliser A dans la base de Fourier.

e) Décrire l'effet fréquentiel du filtre T ?

3. Soit $C_a : \ell_4 \to \ell_4$ l'opérateur de convolution par $a = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

a) Calculer $\hat{a}$. *Indication : on pourra chercher au préalable à exprimer a en fonction d'un des éléments de la base $\mathcal{E}$ des exponentielles complexes de ℓ_4.*

b) Que vaut alors $C_a \circ T$?

Exercice 2

Soit $\tilde{f} : t \in [0, \pi] \mapsto \frac{1}{\pi^2}(t - \pi)^2$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction obtenue à partir de $\tilde{f}$ par prolongement par parité, puis par prolongement 2π-périodique.

1. a) Représenter graphiquement f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Donner l'expression de f sur $[-\pi, 0]$.

2. Pour les théorèmes de convergence d'une série de Fourier suivants :

i) *théorème de Parseval,* ii) *théorème de convergence normale,* iii) *théorème de Dirichlet,*

dire s'ils s'appliquent ou non à f, en justifiant brièvement.

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{2}{\pi^2 n^2}$.

b) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression de la somme partielle (d'ordre N) de la série de Fourier de f, notée $S_N(f)$, de sorte à obtenir une expression ne faisant intervenir que des quantités réelles.

5. a) Que valent $a_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

b) Retrouver alors l'expression de la question 4..

6. Justifier que $S_N(f)(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

1. Rappeler la définition de la transformée de Fourier et montrer la propriété de translation.

2. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$ et démontrer ce résultat.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de $L^2_p(0, 2\pi)$. Énoncer, puis démontrer une condition nécessaire et suffisante, impliquant les coefficients de Fourier de f, pour que f soit à valeurs réelles.

c) On considère cette fois la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique représentée Figure 1 sur une seule période. Justifier la convergence ponctuelle de la série de Fourier de f, puis donner

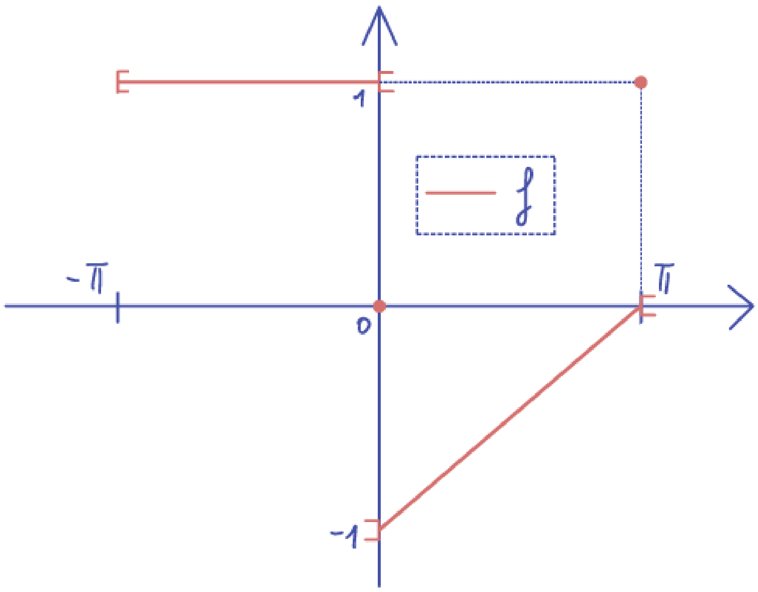

FIGURE 1. Représentation graphique de la fonction f de l'exercice 3, question 2.c). On a $f(0) = 0$ et $f(\pi) = 1$.

$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(t)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'en fonction du contexte, on peut identifier tout élément $z \in \ell_N$ à un vecteur de $\mathbb{C}^N$, mais également à une matrice colonne à N coefficients.

a) Donner la définition des opérateurs DFT et IDFT sur ℓ_N.

b) Montrer que pour tout $z \in \ell_N$, $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}(\hat{z}) = z(N-\cdot)$. *Indication : on pourra démontrer cette relation en utilisant la matrice de l'opérateur DFT dans la base canonique, puis se souvenir que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha = \overline{\overline{\alpha}}$.*

c) Trouver et démontrer une expression similaire pour $\frac{1}{N}\mathrm{DFT}\left(\overline{\hat{z}}\right)$, pour tout $z \in \ell_N$.

d) Soit $z \in \ell_N$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur z pour que $\hat{z}$ soit à valeurs réelles.

e) Application. On suppose dans cette question que $N = 3$. Donner la matrice W_3. Soit $z = (2, 1-i, 1+i) \in \ell_3$. Que peut-on alors dire de $\hat{z}$? On justifiera dans un premier temps sans faire le calcul direct de $\hat{z}$, puis dans un second temps on retrouvera ce résultat en calculant $\hat{z}$.