Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, 2021-2022, Transformée de Fourier et Applications

Examen du 05/05/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Total : 20.5 = 4.5 + 5 + 8 + 2.5, bonus : 2.

Exercice 1. (Cours)

1. a) Rappeler la définition du produit scalaire sur l'espace $L^2_p(0,2\pi)$ et de la norme quadratique (ou norme 2).

b) Rappeler la définition des coefficients de Fourier complexes et réels de $f \in L^2_p(0,2\pi)$.

c) Rappeler la définition de la somme partielle symétrique d'ordre $N \in \mathbb{N}$ de la série de Fourier de $f \in L^2_p(0,2\pi)$. Sur quel sous-espace vectoriel est-ce la projection orthogonale de f ?

d) Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

a) Les fonctions f et g sont-elles dans $L^2_p(0,2\pi)$? *Indication : justification courte attendue.*

b) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = g(t)$.

c) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge absolument. Que dire de la série de Fourier de f ?

Correction.

Total : 4.5 = (0.5 + 0.75 + 0.75 + 0.75) + (0.5 + 0.75 + 0.5).

1. Notons $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des fonctions exponentielles complexes : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $e_n(t) = e^{int}$.

a) Pour $f, g \in L^2_p(0,2\pi)$, le produit scalaire est : $\langle f,\, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, et la norme quadratique : $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$ (0.5pt).

b) Pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \langle f,\, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ (0.75pt).

c) Pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale et $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \langle f,\, e_n\rangle\, e_n$, $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur $E_N = \mathrm{Vect}\left(\{e_n : -N \leqslant n \leqslant N\}\right)$ (0.75pt).

d) Soit $f \in L^2_p(0,2\pi)$. Inégalité de Bessel : pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$. C'est une conséquence du fait que $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur E_N : $\|S_N(f)\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2$ (si $p : E \to E$ est un projecteur orthogonal, alors $\|p(x)\|_2 \leqslant \|x\|_2$ pour tout $x \in E$, grâce au théorème de Pythagore) (0.75pt).

2. a) Comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, c'est également le cas de $|f|^2$ et $|g|^2$ et donc leurs intégrales sur le segment $[0, 2\pi]$ sont bien définies. De plus f, g sont 2π-périodiques, donc $f, g \in L^2_p(0, 2\pi)$ (0.5pt).

b) Pour $N \in \mathbb{N}$, $\|f - g\|_2 = \left\| f - S_N(f) + \underbrace{S_N(f) - S_N(g)}_{=0 \text{ car } c_n(f)=c_n(g) \forall n} + S_N(g) - g \right\|_2 \leqslant \|f - S_N(f)\|_2 + \|f - S_N(f)\|_2$. Ces deux dernières quantités tendent vers 0 par le théorème de Parceval. Donc $\|f - g\|_2 = 0$ et comme f et g continues, on a $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (0.75pt).

c) Elle converge normalement, et comme f et continue, elle converge ponctuellement vers f (0.5pt).

Exercice 2. (Signaux et systèmes)

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$ de ℓ_N.

b) Donner la définition d'un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ stationnaire.

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = \frac{3}{2} z(n) + \left(-1 + \frac{i}{2}\right) z(n-1) + \frac{1}{2} z(n-2) + \left(-1 - \frac{i}{2}\right) z(n+1).$$

a) Justifier que T est bien un opérateur stationnaire.

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Rappeler la définition générale d'un opérateur multiplicateur de Fourier. Écrire T comme un opérateur multiplicateur de Fourier.

e) En justifiant brièvement, à quel type de filtre peut-on assimiler T ?

f) Question bonus : rappeler la propriété satisfaite par la DFT vis à vis de la conjugaison. Pourquoi pouvait-on alors s'attendre, sans calcul explicite, à ce que $\hat{h}$ soit un signal réel ?

Correction.

Total : 5 (+1 bonus) = (0.25 + 0.5) + (0.5 + 1.25 + 1 + 1 + 0.5 (+1 bonus)).

1. a) Pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $e_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_n(k) = 1$ si $n - k$ divisible par N et $e_n(k) = 0$ sinon. En utilisant l'isomorphisme entre ℓ_N et $\mathbb{C}^N$, on peut écrire de manière équivalente $e_n = (\delta_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ (0.25pt).

b) Un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ est stationnaire s'il commute avec les opérateurs de translations R_k pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $T \circ R_k = R_k \circ T$ (0.5pt).

2. a) T s'écrit comme une somme d'opérateurs de translation qui sont des opérateurs stationnaires, donc T est stationnaire (0.5pt).

b) On a $h = T(e_0) = \left(\frac{3}{2}, -1+\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, -1-\frac{i}{2}\right)$ (0.5pt). On trouve que $\hat{h} = (0, 2, 4, 0)$ (0.75pt).

c) Comme T est stationnaire, la matrice de T dans la base canonique, i.e. A, est circulante (0.5pt). Comme h représente la première colonne de A, on a donc

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1-\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -1+\frac{i}{2} \\ -1+\frac{i}{2} & \frac{3}{2} & -1-\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1+\frac{i}{2} & \frac{3}{2} & -1-\frac{i}{2} \\ -1-\frac{i}{2} & \frac{1}{2} & -1+\frac{i}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} .(0.5pt)$$

d) Un opérateur multiplicateur de Fourier s'écrit $M_{(w)} = \mathrm{IDFT} \circ M_w \circ \mathrm{DFT}$ où $w \in \ell_N$ et M_w est l'opérateur de multiplication par w. Appliquer un tel opérateur à un signal quelconque revient à multiplier la DFT de ce signal par w puis de repasser dans le domaine temporel (0.5pt). Comme T est un opérateur stationnaire, c'est un multiplicateur de Fourier par $\hat{h}$. On a donc $T = \mathrm{IDFT} \circ M_{\hat{h}} \circ \mathrm{DFT}$ (0.5pt).

e) Comme $\hat{h} = (0, 2, 4, 0)$, seules les hautes fréquences d'un signal $z \in \ell_4$ (s'apparentant aux coefficients $m = 1, 2$) sont conservées et amplifiés car les basses fréquences de z sont multipliés par 0 et les hautes fréquences par des valeurs plus grandes que 1. T est donc un filtre passe-haut (0.5pt).

f) On a pour tout $z \in \ell_4$, $\overline{\hat{z}}(N - \cdot) = \hat{\hat{z}}$ (0.25pt). On a donc : $\hat{h}$ réel $\Leftrightarrow \overline{\hat{h}} = \hat{h} \Leftrightarrow \widehat{\overline{\hat{h}}} = \hat{\hat{h}} \Leftrightarrow \overline{\hat{\hat{h}}}(N - \cdot) = \hat{\hat{h}}$. Or $\hat{\hat{h}} = Nh(N - \cdot)$, donc $\hat{h}$ réel $\Leftrightarrow \overline{h} = h(N - \cdot)$. On peut vérifier, à partir de l'expression de h, que cette dernière égalité est bien satisfaite. Par conséquent $\hat{h}$ est forcément un signal réel (0.75pt).

Exercice 3. (Séries de Fourier)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f(t) = \begin{cases} t + \pi, & \text{si } t \in]-\pi, 0], \\ \pi, & \text{si } t \in]0, \pi]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$. *Indication : on prendra bien soin de faire apparaître clairement sur le graphe les valeurs en $k\pi$ pour $k \in \{-3, \dots, 3\}$.*

2. La fonction f est-elle continue ?

3. Quelle est la régularité de f ? Justifier brièvement.

4. a) Calculer $c_0(f)$.
   b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f)$.
   c) En utilisant l'égalité de Parceval, déduire que

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{5\pi^2}{48}.$$

5. a) Montrer que la somme partielle symétrique d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de f, i.e. $S_N(f)$, se réécrit comme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \cos(nt) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right).$$

b) Vers quoi la série de Fourier de f converge-t-elle ponctuellement ? Justifier.

c) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(t)$?

d) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Indication : on pourra choisir une valeur de t qui annule les termes $\sin(nt)$.

e) En utilisant un résultat de convergence ponctuelle en $t = \frac{\pi}{2}$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Question bonus : en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, puis enfin de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. *Indication : on pourra séparer, dans les sommes, les entiers naturels pairs et impairs.*

Correction.

Total : 8.5 (+1 bonus) = 0.75 + 0.25 + 0.5 + (0.5 + 0.75 + 1.5) + (1 + 0.75 + 0.75 + 0.75 + 1) (+1 bonus)).

1. Voir la figure 1 (0.75pt).

2. Non car il y a une discontinuité en π (en tous les $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ même) puisque la limite à gauche de f en ce point vaut π et la limite à droite 0 (0.25pt).

3. f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux car elle est 2π-périodique et c'est la restriction sur respectivement $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$ de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur respectivement $[-\pi, 0]$ et $[0, \pi]$ (0.5pt).

4. a) On a $c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$. C'est la valeur moyenne de f. On peut faire un calcul direct ou alors remarquer que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$ est l'aire sous la courbe de f, ce qui revient à sommer l'aire d'un triangle et d'un rectangle. On obtient $c_0(f) = \frac{1}{2\pi}(\frac{\pi^2}{2} + \pi^2) = \frac{3\pi}{4}$ (0.5pt).

b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}dt + \int_0^{\pi} f(t)e^{-int}dt \right)$. Or

$$\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int}dt = \int_{-\pi}^{0} (t+\pi)e^{-int}dt = \left[\frac{t+\pi}{-in} e^{-int} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{0} e^{-int}dt,$$
$$= \frac{\pi}{-in} + \frac{1}{n^2} \left[e^{-int} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{-in} + \frac{1-(-1)^n}{n^2},$$

et

$$\int_0^{\pi} f(t)e^{-int}dt = \int_0^{\pi} \pi e^{-int}dt = \left[\frac{\pi}{-in} e^{-int} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{-in}((-1)^n - 1),$$

donc

$$c_n(f) = \frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} + \frac{(-1)^n}{-2in}.(0.75pt)$$

c) D'après l'identité de Parceval, on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt$ (0.5pt). Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \int_{-\pi}^{0} (t+\pi)^2 dt + \int_{0}^{\pi} \pi^2 dt = \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 = \frac{4\pi^3}{3},$$

de plus pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$|c_n(f)|^2 = \frac{|1-(-1)^n|^2}{4\pi^2 n^4} + \frac{1}{4n^2},$$

en particulier $|c_{-n}(f)|^2 = |c_n(f)|^2$, d'où

$$\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{|1-(-1)^n|^2}{4\pi^2 n^4} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{4\pi^3}{3}, (0.5pt)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|1-(-1)^n|^2}{4n^4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{9\pi^2}{16} = \frac{5\pi^2}{48}.$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1-(-1)^n$ vaut 0 si n est pair et 2 sinon. La somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|1-(-1)^n|^2}{4n^4}$ ne contient donc que les indices impairs et vaut donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{4(2p+1)^4}$. On obtient donc bien l'expression recherchée (0.5pt).

5. a) On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
S_N(f)(t) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n(f)e^{int} + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)e^{int},\\
&= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f)e^{-int} + \sum_{n=1}^{N} c_n(f)e^{int},\\
&= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} + \frac{(-1)^n}{2in}\right)e^{-int} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2} + \frac{(-1)^n}{-2in}\right)e^{int},\\
&= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(-1)^n}{2\pi n^2}(e^{int}+e^{-int}) - \frac{(-1)^n}{2in}(e^{int}-e^{-int})\right),\\
&= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nt) - \frac{(-1)^n}{n}\sin(nt)\right). (1pt)
\end{aligned}$$

b) Comme f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, le théorème de Dirichlet s'applique et donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(t) = (f(t^-)+f(t^+))/2$ (0.75pt).

c) C'est seulement le cas de manière certaine aux $t \in \mathbb{R}$ où f est continue. Or, par exemple, en π, f n'est pas continue. En ce cas $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\pi) = \frac{\pi}{2}$, car les limites à gauche et à droite de f en π sont respectivement π et 0. Or $f(\pi) = \pi$, d'où $f(\pi) \neq \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\pi)$ (0.75pt).

d) On a d'après b), $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\pi) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(f)(\pi) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}(-1)^n$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1-(-1)^n$ vaut 0 si n est pair et 2 sinon. Donc la précédente somme ne contient que les indices n impairs, et à la limite on obtient $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-2}{\pi(2p+1)^2}$, d'où $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ (0.75pt).

e) Toujours d'après b), on a $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(\frac{\pi}{2}) = \pi$ (car f est continue en $\frac{\pi}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \pi$). Or pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(f)(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{(-1)^n}{n}\sin(n\frac{\pi}{2})\right)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\frac{\pi}{2})$ vaut 0 si n est pair, $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ si n est impair. A la limite, on obtient donc $\pi = \frac{3\pi}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\left(-\frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}(-1)^p\right)$ (seul les n impairs apparaissent dans la somme et on a donc remplacé n par $2p+1$). D'où $\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ (1pt).

6. On remarque que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$ (première égalité en séparant les n pairs et impairs et dernière égalité par 5.d)), d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (0.5pt).

De même, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4} + \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{5\pi^2}{48} - \frac{\pi^2}{12}\right)$ (dernière égalité par 4.c) et le calcul précédent), d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$ (0.5pt).

Exercice 4. (Transformée de Fourier)
On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie (quand cela a un sens) par la formule

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

1. Rappeler sur quel espace on définit la transformée de Fourier.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, $\mathcal{C}^2$ et dont les dérivées première et seconde sont également intégrable. Exprimer en fonction de $\hat{f}$ la quantité $\mathcal{F}(f'' - f)$.

3. Soit $\beta_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\beta_0 = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Justifier rapidement que β_0 est intégrable puis calculer $\hat{\beta}_0$.

4. On suppose que f vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) - f(t) = -\beta_0 * \beta_0(t).$$

En déduire une expression de $\hat{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

Correction.
Total : 2.5 = 0.5 + 0.5 + 0.75 + 0.75.

1. L'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables (0.5pt).

2. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{F}(f'' - f)(\omega) = -(1+\omega^2)\hat{f}(w)$ (0.5pt).

3. β_0 est à support borné et est constante sur son support donc β_0 est intégrable (0.25pt). On montre que $\hat{\beta}_0(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ (0.5pt).

4. Vu l'équation vérifiée par f, on a donc $\mathcal{F}(f'' - f) = -\mathcal{F}(\beta_0 * \beta_0) = \hat{\beta}_0^{\,2}$ (0.5pt). Donc d'après ce qui précède

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}{1+\omega^2}.(0.25pt)$$

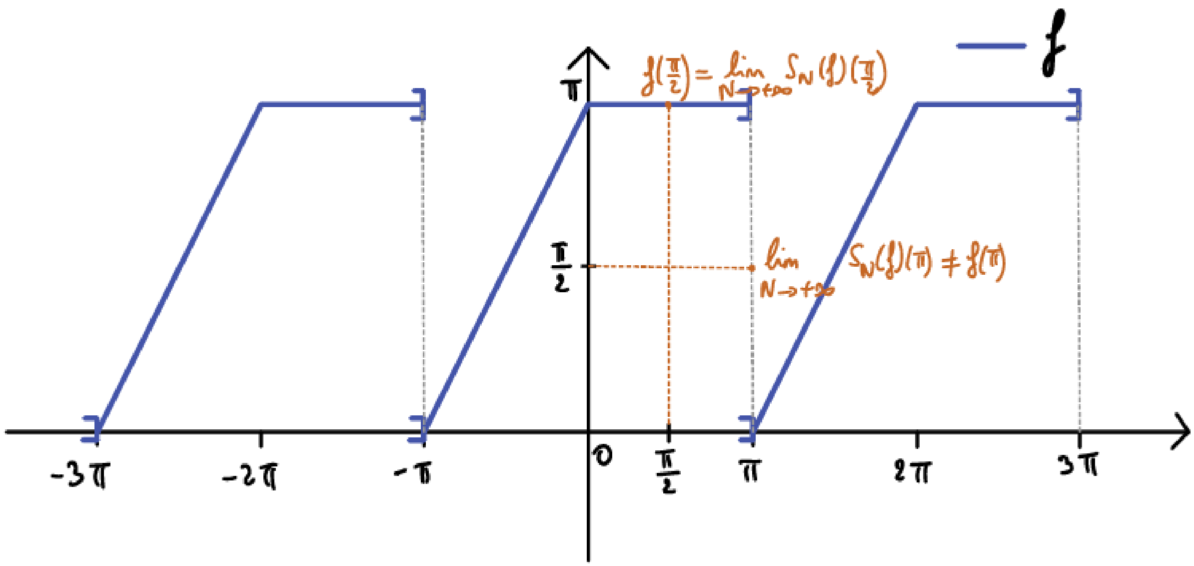

Figure 1: Fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$ de Exercice 3, 1.