Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 3ème année, 2021-2022, Transformée de Fourier et Applications

Examen du 05/05/2022

Durée 1h30. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. On prendra soin de bien justifier les réponses.

Exercice 1. (Cours)

1. a) Rappeler la définition du produit scalaire sur l'espace $L^2_p(0, 2\pi)$ et de la norme quadratique (ou norme 2).

b) Rappeler la définition des coefficients de Fourier complexes et réels de $f \in L^2_p(0, 2\pi)$.

c) Rappeler la définition de la somme partielle symétrique d'ordre $N \in \mathbb{N}$ de la série de Fourier de $f \in L^2_p(0, 2\pi)$. Sur quel sous-espace vectoriel est-ce la projection orthogonale de f ?

d) Énoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

a) Les fonctions f et g sont-elles dans $L^2_p(0, 2\pi)$? *Indication : justification courte attendue.*

b) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = g(t)$.

c) On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)$ converge absolument. Que dire de la série de Fourier de f ?

Exercice 2. (Signaux et systèmes)

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

a) Rappeler la définition de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_{N-1})$ de ℓ_N.

b) Donner la définition d'un opérateur $T : \ell_N \to \ell_N$ stationnaire.

2. On suppose à partir de maintenant $N = 4$ et on définit $T : \ell_4 \to \ell_4$ pour tout $z \in \ell_4$ et tout $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$T(z)(n) = \frac{3}{2}z(n) + \left(-1 + \frac{i}{2}\right) z(n-1) + \frac{1}{2}z(n-2) + \left(-1 - \frac{i}{2}\right) z(n+1).$$

a) Justifier que T est bien un opérateur stationnaire.

b) Donner la réponse impulsionnelle h de T. Calculer sa DFT $\hat{h}$.

c) On note A la matrice de T dans la base canonique de ℓ_4. En justifiant brièvement, de quel type de matrice s'agit-il ? Donner l'expression de A.

d) Rappeler la définition générale d'un opérateur multiplicateur de Fourier. Écrire T comme un opérateur multiplicateur de Fourier.

e) En justifiant brièvement, à quel type de filtre peut-on assimiler T ?

f) Question bonus : rappeler la propriété satisfaite par la DFT vis à vis de la conjugaison. Pourquoi pouvait-on alors s'attendre, sans calcul explicite, à ce que $\hat{h}$ soit un signal réel ?

Exercice 3. (Séries de Fourier)
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et définie par

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \quad f(t) = \begin{cases} t + \pi, & \text{si } t \in]-\pi, 0], \\ \pi, & \text{si } t \in]0, \pi]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$. *Indication : on prendra bien soin de faire apparaître clairement sur le graphe les valeurs en $k\pi$ pour $k \in \{-3, \ldots, 3\}$.*

2. La fonction f est-elle continue ?

3. Quelle est la régularité de f ? Justifier brièvement.

4. a) Calculer $c_0(f)$.

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f)$.

c) En utilisant l'égalité de Parceval, déduire que

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{5\pi^2}{48}.$$

5. a) Montrer que la somme partielle symétrique d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de f, i.e. $S_N(f)$, se réécrit comme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \cos(nt) - \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right).$$

b) Vers quoi la série de Fourier de f converge-t-elle ponctuellement ? Justifier.

c) A-t-on pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(t)$?

d) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Indication : on pourra choisir une valeur de t qui annule les termes $\sin(nt)$.

e) En utilisant un résultat de convergence ponctuelle en $t = \frac{\pi}{2}$, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Question bonus : en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, puis enfin de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. *Indication : on pourra séparer, dans les sommes, les entiers naturels pairs et impairs.*

Exercice 4. (Transformée de Fourier)
On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie (quand cela a un sens) par la formule

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

1. Rappeler sur quel espace on définit la transformée de Fourier.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, $\mathcal{C}^2$ et dont les dérivées première et seconde sont également intégrable. Exprimer en fonction de $\hat{f}$ la quantité $\mathcal{F}(f'' - f)$.

3. Soit $\beta_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\beta_0 = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$. Justifier rapidement que β_0 est intégrable puis calculer $\hat{\beta}_0$.

4. On suppose que f vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) - f(t) = -\beta_0 * \beta_0(t).$$

En déduire une expression de $\hat{f}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.