Chapitre 3 : Séries de Fourier

Décomposition de signaux de la variable continue et 2π-périodique à partir de fonctions de bases plus simples

$$\begin{cases} t \mapsto \cos(nt), & n \geqslant 0 \\ t \mapsto \sin(nt), & n \geqslant 1 \end{cases}$$

C'est-à-dire écrire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique sous la forme

$$f(t) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right)$$

Question : quelles types de fonctions peut-on décomposer de cette manière ?
dans quelle sens ? Comme on a une somme infinie, différents types de convergence.

Motivation : théorie utile dans de nombreuses applications (optique, accoustique, physique en général, traitement du signal...)

I) Rappels sur les séries de Fourier et leur convergence L^2

1) Définitions

Déf : Fonction T périodique $f : D_f \to \mathbb{C}$

si $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R},\ t \in D_f \Rightarrow t+T \\ \forall t \in D_f,\ f(t+T) = f(t) \end{cases}$

Ex : $t \mapsto \begin{cases} \cos(nt) \\ \sin(nt) \end{cases}$ $\quad t \mapsto e^{int}$ $\quad \Big|$ 2π-pér

$t \mapsto \tan(t)$ $\quad \pi$-périodique

$t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t)$ $\quad r$-périodique pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

Proposition ; prolongement par 2π périodicité, parité, imparité.

Déf : Ensemble des fonctions 2π périodiques intégrables

noté $L^1_p(0,2\pi) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \left| \begin{array}{l} f \ 2\pi \text{ périodique} \\ f \text{ "suffisamment régulière"} \\ \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt < +\infty \end{array} \right. \right\}$

Rmq : • $f \in L^1_p(0,2\pi) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in L^1_p(0,2\pi)$

et $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)\,dt + \int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)\,dt$

• $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ si $f \in L^1_p(0,2\pi)$

<u>Déf</u> : [fonctions de carré intégrable 2π-périodiques]

$$L^2_p(0,2\pi) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \begin{array}{|l} f\ 2\pi\text{-périodique} \\ f \text{ suffisamment régulière} \\ \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < +\infty \end{array} \right\}$$

C'est un ev de dimension infinie

On le munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

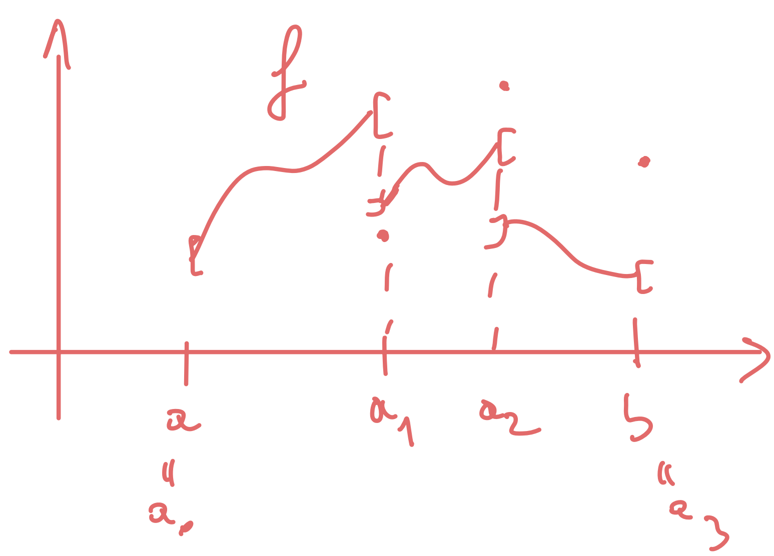
C'est un espace de Hilbert

Norme (hilbertienne) : $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$

<u>Déf</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dira que f est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe $a = a_0 < \dots < a_n = b$ une subdivision telle que

f est la restriction sur $]a_i, a_{i+1}[$ d'une fonction continue sur $[a_i; a_{i+1}]$

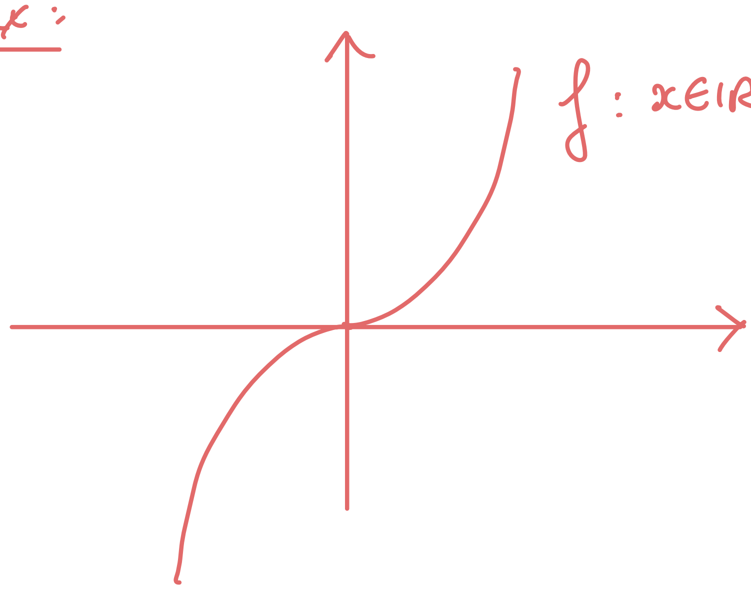
<u>ex</u> :



f est définie sur $[a,b]$, sur chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ est la restriction d'une fonction continue prolongée sur $[a_i; a_{i+1}]$.

• On dira que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, par morceaux sur $\mathbb{R}$, si $f_{|[a,b]}$ est $\mathcal{C}^0$ par morceaux pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

ex :



$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux (même $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux)

Prop : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique, est $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, par morceaux ssi sa $f_{|[0,2\pi]}$ est $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Rmq : une définition équivalente de $\mathcal{C}^k$ par morceaux est d'exiger que f restreinte à chacun des $]a_i, a_{i+1}[$ soit $\mathcal{C}^k$ et $f, f', \dots, f^{(k)}$ admettent limite à droite en a_i et limite à gauche en a_{i+1}.

Prop : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique $\mathcal{C}^0$ par morceaux alors $f \in L^2_p(0, 2\pi)$.

De plus on a $L^2_p(0, 2\pi) \subset L^1_p(0, 2\pi)$

Preuve : f est $\mathcal{C}^0$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$ donc c'est le cas aussi de $|f|^2$ et l'intégrale d'une fonction $\mathcal{C}^0$ par morceaux sur un segment est bien déf.

Pour $L^2_p(0, 2\pi) \subset L^1_p(0, 2\pi)$, on utilise Cauchy-Schwarz :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \times 1 \, dt = \langle f, t \mapsto 1 \rangle$$
$$\leq \|f\|_2 \underbrace{\|t \mapsto 1\|_2}_{=1} < +\infty$$

2) Coefficients de Fourier :

Déf : $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

Prop : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ famille orthonormale de $L^2_p(0, 2\pi)$.

Preuve : à faire.

Déf [Coeff de Fourier complexe]

Soit $f \in L^2_p(0, 2\pi)$.

On appelle n-ième coeff de Fourier complexe de f, pour $n \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$