2) Orthogonalité et indépendance linéaire

Thm : Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ famille $\perp$ avec $\forall i,\ u_i \neq 0$. Alors $\mathcal{F}$ est libre.

Preuve : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ tq $\sum \lambda_i u_i = 0$ alors $\langle \| , u_j \rangle = 0$ $\forall j \in [\![1, p]\!]$,

$\lambda_j \underbrace{\|u_j\|^2}_{\neq 0}$ car $u_j \neq 0$ par hyp.

$\Rightarrow \forall j,\ \lambda_j = 0$.

Corollaire : $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ famille $\perp$ dans E de dim n, $u_i \neq 0\ \forall i$.

alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est une base $\perp$.

Si les u_i sont normés alors <u>base orthonormée</u>

Thm : Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base $\perp$ de E.

Alors, $\forall u \in E$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i .$$

Si $\mathcal{B}$ est orthonormée alors, $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i \rangle u_i$

Preuve : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, $\lambda_i = \langle u, u_i \rangle \|u_i\|^2$

3) Projection $\perp$

<u>Déf</u> : Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ avec $\forall i, u_i \neq 0$ et $p \leq n = \dim(E)$ et $(u_1, \dots, u_p)$ famille $\perp$.
Alors, on définit la projection $\perp$ sur F comme l'endomorphisme

$$p_F : E \longrightarrow E, \quad u \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i .$$

<u>Remarque</u> : p_F indépendant choix de la famille $\perp$

Notons que l'on a bien pour tout $u \in E$, $p_F(u) \in F$

<u>Théorème</u> : $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ famille $\perp$
Alors p_F vérifie les propriétés suivantes :

i) Si $u \in F$, $p_F(u) = u$ (ou encore $p_F^2 = p_F$ i.e. p_F est un projecteur)

ii) $\forall u \in E$, $\forall v \in F$, $u - p_F(u) \perp v$
ou encore $\langle u - p_F(u), v\rangle = 0$. <u>Dessin</u>

iii) $\forall u \in E$, $\forall v \in F$
$\| u - p_F(u) \| \leq \| u - v \|$.
$p_F(u)$ est le point qui est le plus proche de u dans F.

$$\| u - p_F(u) \| = \inf_{v \in F} \| u - v \| .$$

__Preuve :__ i) $u \in F$, $u = \sum \alpha_i u_i$

avec $\alpha_i = \dfrac{\langle u, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}$ donc $u = p_F(u)$.

ii) $$\left\langle u - \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i \,,\, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle u, u_i \rangle - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle u, u_i \rangle = 0$$

iii) On a $u - v = u - p_F(u) + p_F(u) - v$

$u - p_F(u) \perp p_F(u) - v$

donc Pythagore $\|u - v\|^2 = \|u - p_F(u)\|^2 + \|p_F(u) - v\|^2$

$\geq \|u - p_F(u)\|^2$.

__Remarques :__ Interprétation géométrique

4) Existence d'une base $\perp$ (ortho de Gram-Schmidt)

Dès que l'on a une famille $\perp$ qui engendre un sev, on peut définir projection $\perp$.
Mais, si on a juste F sev. Peut-on définir tout de même proj $\perp$. Oui : car on peut toujours trouver une famille $\perp$ qui engendre F.

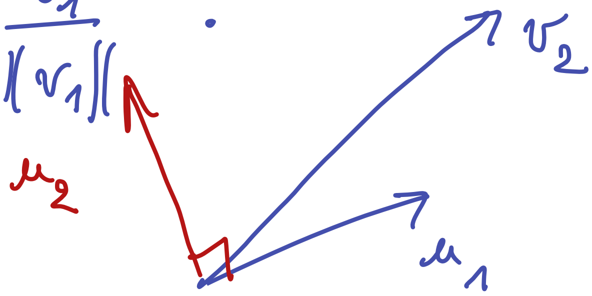
__Théorème :__ Soit F sev de E et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille libre qui engendre F.
Alors il existe $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille orthonormée qui engendre F et de plus pour tout

$1 \leq i \leq p$, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i)$

Preuve : L'idée est de l'orthonormaliser $\mathcal{F}$ au fur et à mesure.

• $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$.

•



On a $v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 \perp u_1$

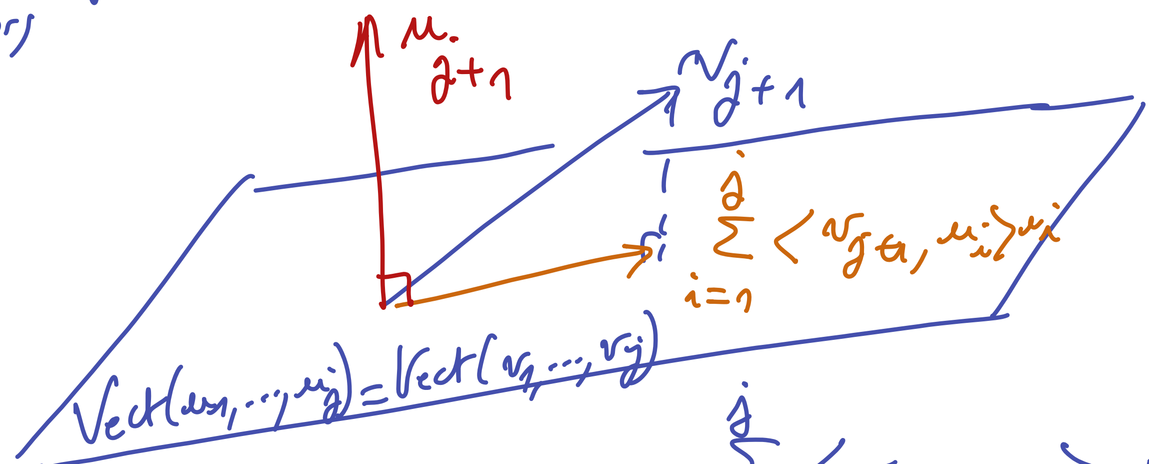
Il ne nous reste plus qu'à normaliser

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\| v_2 - \langle u_2, u_1 \rangle \|}.$$

On a bien $u_2 \perp u_1$, $\|u_2\| = 1$.

et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$

• Supposons $u_1, \dots, u_j$ construits pour $j \in [\![1, p-1]\!]$ alors



On pose
$$u_{j+1} = \frac{v_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle v_{j+1}, u_i \rangle u_i}{\left\| v_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle v_{j+1}, u_i \rangle u_i \right\|}$$

On a bien $\|u_{j+1}\| = 1$ et $u_{j+1} \perp \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_j)$

et $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{j+1}) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{j+1})$ $= \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_j)$ $\square$

5) Propriétés fondamentales d'une base orthonormale et orthogonale

<u>Théorème</u> : $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base orthonormale de E.

Alors, pour tout $u, v \in E$,

1) $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i \rangle u_i$ (Formule de décomposition)

2) $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i \rangle \overline{\langle v, u_i \rangle}$ (Identité de Parceval)

3) $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, u_i \rangle|^2$ (Identité de Plancherel)

<u>Preuve</u> : En exercice.

IV) Opérateurs et produit scalaire

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien de dimension n.

1) Opérateurs conservant le produit scalaire

Déf : Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
On dira que f conserve le produit scalaire si pour tout $u, v \in E$,
$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$
On dira alors que f est un automorphisme unitaire (orthogonal si cas réel).

Théorème : $f : E \to E$ endomorphisme.
On a les équivalences :
1) f est un automorphisme unitaire
2) f transforme toute base orthonormale de E en une autre base orthonormale de E.
3) f conserve la norme euclidienne