Prop : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, $\sum f_n$ CV normalement.

a) $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ est abs. CV donc CV.

b) Soit $S : t\in\mathbb{R} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$. Alors S est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

c) On peut intervertir $\sum$ et $\int_I$ pour tout $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Preuve : a) trivial.

b) Soit $t_0\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$, $|S(t)-S(t_0)| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} |f_n(t)-f_n(t_0)|}_{\text{petit par } \mathcal{C}^0 \text{ de } f_n \text{ en } t_0} + \underbrace{\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |\quad|}_{\leq 2\sum_{n_0+1}^{+\infty}\|f_n\|_\infty}$

c) • $\sum \int_I f_n$ est abs. CV.

• $\left|\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt - \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,dt\right| = \left|\int_I \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(t)\,dt - \sum_{n=N}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,dt\right|$

$\leq 2(b-a)\sum_{N}^{+\infty}\|f_n\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque : résultat valable lorsque $\sum_{n\in\mathbb{N}} \to \sum_{n\in\mathbb{Z}}$

Théorème (de convergence normale des séries de Fourier) :

Soit f $\mathcal{C}^0$ 2π périodique, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ CV normalement, **alors** série de Fourier de f CV ponctuellement vers f sur $\mathbb{R}$ i.e.

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

$$\left(\text{ou encore}\quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\,e^{int}\right)$$

Preuve : par la proposition, $\sum c_n(f)e_n$ CV ponctuellement vers S une fonction $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

S est 2π-périodique : $\forall t \in \mathbb{R}$, $S(t+2\pi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in(t+2\pi)} = S(t)$

Pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$,

$$c_{n_0}(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int}\right) e^{-in_0 t}$$

$$\underset{\substack{\int_I \leftrightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \\ \text{par CV normale} \\ \text{de } \sum c_n(f) e_n}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)t}\,dt}_{=\delta_{n,n_0}} = c_{n_0}(f)$$

D'où $f \overset{L^2}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(S) e_n \overset{L^2}{=} S$

Parseval   Parseval

Ainsi $\int_0^{2\pi} |f(t) - S(t)|^2\,dt = 0$. Mais $|f-S|^2$ est continue sur $[0, 2\pi]$, positif donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$ $f(t) = S(t)$. Comme f et S 2π périodique c'est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(t)$, on a donc

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(t) \qquad \square$$

Remarque : On a $\sum c_n(f) e_n$ CV normalement ssi $\sum c_n(f)$ CV absolument, puisque $\| c_n(f) e_n \|_\infty = |c_n(f)|$. Donc condition CV normale du précédent thm peut être remplacée par $\sum |c_n(f)|$ CV abs.

Question : Quand $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)$ CV absolument ?

Premier cas : f est $\mathcal{C}^2$

Prop : Si f $\mathcal{C}^2$ 2π-périodique (alors $f \in L^2_x(0,2\pi)$)
Alors la série de Fourier de f converge ponctuellement vers f :

$$\forall t \in [0, 2\pi), \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int}$$

Preuve : On a : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)$ est ABC. D'où conclusion d'après ii) précédent thm i).

Remarque : OK pour fonctions régulières mais pas pour fonction très simples ou encore linéaires, créneaux.

Deuxième cas : f $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Prop : f $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$ mx 2π périodique ($\subset L^2$).
Alors CV ponctuelle série de Fourier.

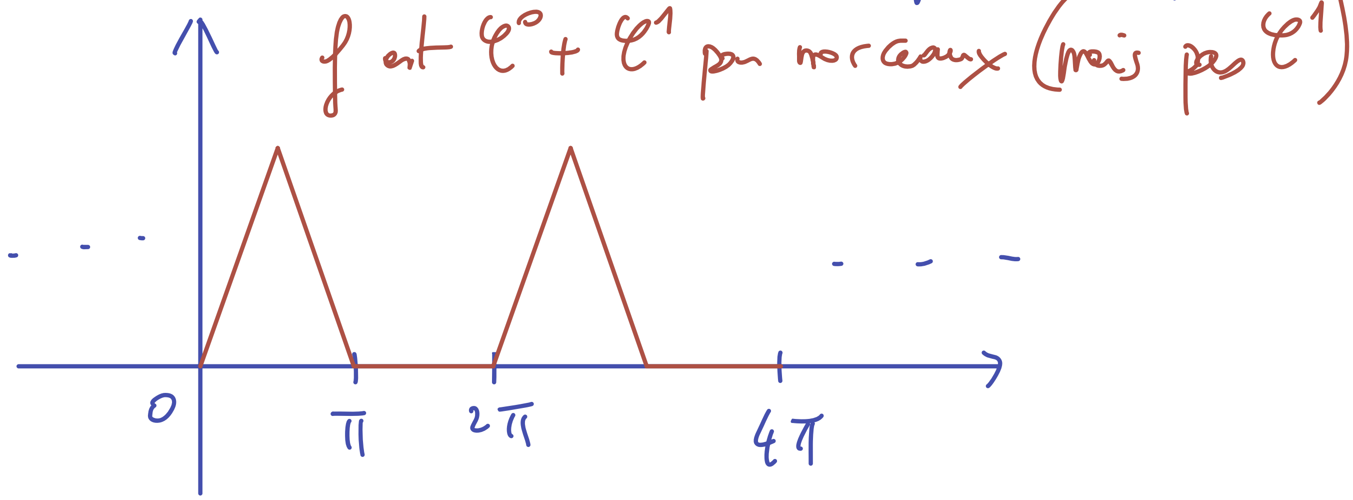
Preuve : f' est $\mathcal{C}^0_{mx}$ donc dans L^2 et $\forall n \neq 0$
$c_n(f') = in\, c_n(f)$ donc

$$|c_n(f)| = |n\, c_n(f)| \frac{1}{|n|} \leq \frac{1}{n^2} + \underbrace{n^2 |c_n(f)|^2}_{= |c_n(f')|^2}$$

Or $\sum_{\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$ et $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 < +\infty$

donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. On conclut par thm.

<u>Remarque</u> : on sait donc montrer la CV ponctuelle série de Fourier pour des fonctions suffisamment régulières ($\mathcal{C}^2$) et même $\mathcal{C}^0$ + $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc par exemple du type



Par contre le résultat ne s'applique pas pour une fonction du type