Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
TRANSFORMÉE DE FOURIER ET APPLICATIONS

Feuille de TD n°6

Transformée de Fourier et applications aux EDPs.

Exercice 1 (Propriétés de la Transformée de Fourier)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Exprimer en fonction de la transformée de Fourier de f la transformée de Fourier des fonctions suivantes g suivantes (*on justifiera au préalable à chaque fois que la transformée de Fourier des fonctions considérées existe*).

1. Dilatation : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(at)$, avec $a \neq 0$ (*on fera attention dans les calculs au signe de* a).
2. Translation : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(t-b)$, avec $b \in \mathbb{R}$.
3. Dilatation et translation : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(at-b)$, avec $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.
4. Modulation : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{ict} f(t)$, avec $c \in \mathbb{R}$.
5. Dérivée : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f'(t)$ (*on suppose ici f dérivable et f' intégrable ; on pourra effectuer une intégration par parties, en se restreignant dans un premier temps à l'intervalle d'intégration $[-A, A]$ pour $A > 0$. On justifiera ensuite précisément le passage à la limite pour $A \to \infty$*).
6. Dérivée n-ième : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f^{(n)}(t)$ (*on suppose ici qu'elle existe et est intégrable sur* $\mathbb{R}$).

Exercice 2 (Transformée de Fourier d'une gaussienne)
Soit $f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.

1. Démontrer que : $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.
   On pourra pour cela écrire que $I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y$ et utiliser un changement de variables en coordonnées polaires.
2. En déduire la transformée de Fourier de f (*on pourra admettre le résultat suivant :* $\forall \omega \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(t+i\omega)^2}{2}} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$).
3. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $g : t \mapsto e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Exercice 3
Calculer la transformée de Fourier des fonctions ci-dessous. On pourra au préalable les représenter graphiquement.

1. Signal impulsionnel rectangulaire : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = A \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t)$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $T > 0$.
2. Signal impulsionnel rectangulaire centré en $t_0 \in \mathbb{R}$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}(t - t_0)$, avec $T > 0$.
   Indication : utiliser la formule de la transformée de Fourier de la translation d'une fonction..
3. On veut calculer la transformée de Fourier du signal triangulaire (aussi appelée B-spline [1] d'ordre 1) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \beta_1(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 1-t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   On note β_0 la fonction de la question 1. lorsque $A = 1$ et $T = 1$, que l'on appelle parfois *fonction porte* ou encore B-spline d'ordre 0.

   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$
   $$\beta_0 * \beta_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{t+[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(s) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(s) ds.$$
   b) En s'aidant d'un dessin et en distinguant les cas $|t| > 1$ et $|t| \leqslant 1$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\beta_0 * \beta_0(t) = \beta_1(t)$.
   c) En déduire $\mathcal{F}(\beta_1)$.

1. https ://fr.wikipedia.org/wiki/B-spline

d) On définit plus généralement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction B-spline d'ordre n par la relation $\beta_n = \beta_{n-1} * \beta_0$. En déduire $\mathcal{F}(\beta_n)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-a|t|}$, avec $a > 0$.

Exercice 4

On cherche à résoudre les Equations aux Dérivées Partielles qui suivent avec la méthode de Fourier. Dans ce qui suit, on cherche ces solutions parmi les fonctions $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$, telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto u(t, x)$ et ses dérivées sont intégrables (ainsi que leurs transformées de Fourier) sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t, x)$ et ses dérivées sont intégrables (ainsi que leurs transformées de Fourier). On suppose que les conditions initiales sont suffisamment régulières, intégrables et de transformées de Fourier intégrables.

1. EDP de la **diffusion**, ou de la **chaleur**, ou de **Fourier**

$$\begin{cases} \partial_t u = \alpha^2 \partial_x^2 u, \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

où la condition initiale φ est intégrable.

2. EDP de **transport**

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

où la condition initiale φ est intégrable.

3. EDP des **ondes**, ou de **d'Alembert**

$$\begin{cases} \partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \\ u(0, x) = f(x), \\ \partial_t u(t, x)_{|t=0} = g(x). \end{cases}$$

où les conditions initiales f et g sont intégrables. *On pourra utiliser le résultat suivant, après l'avoir démontré en utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse : pour a et b des réels quelconques,*

$$\int_a^b g(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega) \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega} \mathrm{d}\omega.$$

4. $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$. EDP du **potentiel**, ou de**Laplace**

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

On rappelle que par définition $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$. On admettra le résultat suivant :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|\omega| y} e^{i\omega x} e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega = 2 \frac{y}{y^2 + (t - x)^2}.$$