Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
TRANSFORMÉE DE FOURIER ET APPLICATIONS

Feuille de TD n°5

Séries de Fourier - exercices supplémentaires.

Exercice 1

Soit $f \in L^2_p(0, 2\pi)$ que l'on suppose à valeurs réelles.

1. Énoncer l'identité de Parseval pour f.

2. En déduire que

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

3. En déduire que $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Correction.

1. On a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt$ puisque f est réelle.

2. On sait que $c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$. Comme f est réelle, on a $a_n(f) \in \mathbb{R}$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|c_n(f)|^2 = |c_{-n}(f)|^2 = \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{4}$. Ainsi l'identité de Parseval, impliquant les coefficients de Fourier complexes de f, donnée à la question précédente fournit

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{4} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt,$$

d'où l'égalité cherchée.

3. D'après la question précédente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right)$ est convergente. Nécessairement $a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f)^2 + b_n(f)^2 \geqslant \max(a_n(f)^2, b_n(f)^2)$, on déduit bien que $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> On vient de redémontrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour les coefficients de Fourier réels. Notez que de l'identité de Parseval fournit dans la première question, on aurait pu de même retrouver que $c_n(f) \underset{n\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2

On note $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel complexe des suites indexées par $\mathbb{Z}$ et de carré sommable muni du produit scalaire complexe

$$\forall u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \langle u,\, v\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n\overline{v_n},$$

et de sa norme euclidienne notée $\|\cdot\|_2$.

On considère

$$\Phi : L^2_p(0, 2\pi) \to \ell^2(\mathbb{Z}),$$
$$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

> Notez que Φ est l'équivalent de l'opérateur DFT dans le contexte de l'analyse de Fourier des éléments de $L^2_p(0, 2\pi)$.

1. Montrer que Φ est linéaire.

2. Montrer que Φ est injective. *Indication : on pourra utiliser l'identité de Parseval.*

> On vient de montrer que la connaissance des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2_p(0, 2\pi)$ la caractérise complètement. On pourrait montrer que Φ est également surjective, d'où $L^2_p(0, 2\pi) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$.

3. En utilisant le théorème de Parseval (de convergence en moyenne quadratique), montrer que pour tout $f, g \in L^2_p(0, 2\pi)$, $\langle S_N(f),\, S_N(g)\rangle \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f,\, g\rangle$. En déduire que $\langle \Phi(f),\, \Phi(g)\rangle = \langle f,\, g\rangle$.

<u>Correction</u>.

1. Φ est linéaire par linéarité à gauche du produit scalaire.

2. Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$ tel que $\Phi(f) = 0$. Or par l'identité de Parseval, $\|f\|_2 = \|\Phi(f)\|_2 = 0$, d'où $f = 0$ (dans $L_p^2(0, 2\pi)$). Donc Φ est injective.

> On a donc montré que si $f, g \in L_p^2(0, 2\pi)$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ (dans $L_p^2(0, 2\pi)$).

3. Soit $f, g \in L_p^2(0, 2\pi)$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} |\langle f,\, g\rangle - \langle S_N(f),\, S_N(g)\rangle| &= |\langle f - S_N(f),\, g\rangle + \langle S_N(f),\, g - S_N(g)\rangle|\,, \\ &\leqslant |\langle f - S_N(f),\, g\rangle| + |\langle S_N(f),\, g - S_N(g)\rangle|\,, \\ &\leqslant \|f - S_N(f)\|_2 \,\|g\|_2 + \|S_N(f)\|_2 \,\|g - S_N(g)\|_2\,, \\ &\leqslant \|f - S_N(f)\|_2 \,\|g\|_2 + \|f\|_2 \,\|g - S_N(g)\|_2\,, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Bessel. Donc $|\langle f,\, g\rangle - \langle S_N(f),\, S_N(g)\rangle| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque $\|f - S_N(f)\|_2\,, \|g - S_N(g)\|_2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par le théorème de Parseval.

Mais $\langle S_N(f),\, S_N(g)\rangle = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\overline{c_n(g)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)} = \langle \Phi(f),\, \Phi(g)\rangle$. Donc par unicité de la limite, on déduit bien que $\langle \Phi(f),\, \Phi(g)\rangle = \langle f,\, g\rangle$. L'opérateur Φ conserve le produit scalaire.