Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
TRANSFORMÉE DE FOURIER ET APPLICATIONS

Feuille de TD n°5

Séries de Fourier - exercices supplémentaires.

Exercice 1

Soit $f \in L_p^2(0, 2\pi)$ que l'on suppose à valeurs réelles.

1. Énoncer l'identité de Parseval pour f.
2. En déduire que

$$\frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt.$$

3. En déduire que $a_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 2

On note $\ell^2(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel complexe des suites indexées par $\mathbb{Z}$ et de carré sommable muni du produit scalaire complexe

$$\forall u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \langle u,\, v\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n},$$

et de sa norme euclidienne notée $\|\cdot\|_2$.

On considère

$$\Phi : L_p^2(0, 2\pi) \to \ell^2(\mathbb{Z}),$$
$$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\,.$$

> Notez que Φ est l'équivalent de l'opérateur DFT dans le contexte de l'analyse de Fourier des éléments de $L_p^2(0, 2\pi)$.

1. Montrer que Φ est linéaire.
2. Montrer que Φ est injective. *Indication : on pourra utiliser l'identité de Parseval.*

> On vient de montrer que la connaissance des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L_p^2(0, 2\pi)$ la caractérise complètement. On pourrait montrer que Φ est également surjective, d'où $L_p^2(0, 2\pi) \simeq \ell^2(\mathbb{Z})$.

3. En utilisant le théorème de Parseval (de convergence en moyenne quadratique), montrer que pour tout $f, g \in L_p^2(0, 2\pi)$, $\langle S_N(f),\, S_N(g)\rangle \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \langle f,\, g\rangle$. En déduire que $\langle \Phi(f),\, \Phi(g)\rangle = \langle f,\, g\rangle$.