Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License 3$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
TRANSFORMÉE DE FOURIER ET APPLICATIONS

Feuille de TD n°5

Séries de Fourier.

Exercice 1 (Orthogonalité du système trigonométrique)
Soit l'ensemble de fonctions suivant

$$\{x \in [0, 2\pi] \mapsto \cos(nx), x \in [0, 2\pi] \mapsto \sin(mx) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*\}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx)\mathrm{d}x = \pi$.
2. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, avec $n \neq m$, et $p, q \in \mathbb{N}$, avec $p \neq q$, $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\mathrm{d}x = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0$.
4. En déduire un système orthonormal réel pour $L^2_p(0, 2\pi)$.

On peut démontrer que ce système orthonormal est complet, c'est-à-dire que n'importe quel élément de $L^2_p(0, 2\pi)$ peut se décomposer dans ce système, et on l'appelle système orthonormal complet de Fourier réel de $L^2_p(0, 2\pi)$. Voir la convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier.

Exercice 2
Soit $f \in L^2_p(0, 2\pi)$.

1. Rappeler les définition des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ et des coefficients de Fourier réels $(a_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, $(b_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f.
2. Rappeler la définition de la somme partielle d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de la série de Fourier (complexe) f, notée $S_N(f)$.
3. Définir $S_N(f)$ en terme de projection orthogonale.
4. A partir de l'expression de la question 2. de $S_N(f)$, montrer que pour tout $t \in [0, 2\pi]$,

$$S_N(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right).$$

5. Si f est à valeurs réelles, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(f) = 2\mathrm{Re}(c_n(f))$ et $a_n(f) = -2\mathrm{Im}(c_n(f))$.

Exercice 3
Soit $h :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la fonction constante valant 1.

1. A partir de h, définir $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique obtenue par prolongement par imparité de h, puis 2π-périodisation. La fonction H est appelée fonction créneau.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(H) = 0$ si n est pair et $c_n(H) = \frac{2}{i\pi n}$ sinon.

Exercice 4 (Riemann-Lebesgue)

1. Soit $a < b$ tels que $[a, b] \subset [0, 2\pi]$. Montrer que $\int_a^b e^{int}dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et constante par morceaux. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = 2\pi$ et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall t \in \bigcup_{k=0}^{N-1}]a_k, a_{k+1}[, \quad f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \mathbb{1}_{]a_k, a_{k+1}[}(t).$$

   a) Commenter la régularité de f.
   b) Montrer que $c_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On suppose que le résultat précédent est valable pour n'importe quelle fonction continue par morceaux 2π périodique (et même de $L^2_p(0,2\pi)$). C'est le lemme de Riemann-Lebesgue. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π périodique. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f').$$

En déduire que $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 5

1. Soient $a < b$ deux réels. En se ramenant au cas 2π-périodique, donner une base orthonormée de l'espace $L^2_p(a,b)$ formé des fonctions de carré intégrable sur $[a,b]$ et périodiques de période $b-a$, muni du produit scalaire

$$\langle f\ ,\ g\rangle_{L^2_p(a,b)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\bar{g}(x)\mathrm{d}x$$

Calculer l'expression des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^2_p(a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, périodique de période $b-a$. Comment s'écrit l'égalité de Parseval dans ce cas général ? *Suggestion : on pourra poser $\omega = \frac{2\pi}{b-a}$, dit* ***pulsation****, pour simplifier les expressions.*

2. Calculer les coefficients du développement en série de Fourier des fonctions suivantes :

a) Onde carrée :

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{si } 0 < x < \pi, \\ -A & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

b) Mantisse : $f : x \mapsto x - E(x)$, $x \in [0,1]$, où $E(x)$ est la partie entière de x. On pourra commencer par tracer le graphe de cette fonction.

c) La fonction exponentielle définie sur $[0,2\pi]$ et étendue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

d) La fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $[-\pi,\pi]$ (et étendue sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité), puis en déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6

Donner la régularité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{2}$ pour $x \in]-\pi,\pi[$ et $f(\pi) = 0$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique paire telle que $\forall x \in [0,\pi], f(x) = 1 - 2x$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique impaire telle que $\forall x \in [0,\pi], f(x) = x(\pi - x)$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi,\pi[, f(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $f(\pi) = 0$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi,\pi]$, $f(x) = \cosh(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné).
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sup(0, \sin(x))$.

Exercice 7

Calculer les coefficients de Fourier des fonctions de l'exercice précédent, puis étudier la convergence ponctuelle (ou même normale) des séries de Fourier correspondantes et écrire dans ce cas f comme somme de sa série de Fourier. On prendra soin de vérifier si à chaque fois f satisfait les propriétés requises.

Exercice 8

Soit la fonction f de période 2π définie sur $[-\pi,\pi[$ par $f(\theta) = \cosh(a\theta)$ ($a > 0$ donné).

1. Calculer le développement en série de Fourier de f.
2. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2a}\left[\coth(\pi a) - \frac{1}{\pi a}\right].$$

Exercice 9

Fixons $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$. On définit la fonction $f_x(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2x}(2x-\theta), & \text{si } t \in [0,2x], \\ 0 & \text{si } \theta \in [2x,\pi] \end{cases}$ et prolongée par parité et 2π-périodicité.

1. Développer f_x en série de Fourier.
2. En déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2(kx)}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^4(kx)}{k^4}$.