Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
TRANSFORMÉE DE FOURIER ET APPLICATIONS

# Feuille de TD n°4

DFT : matrices circulantes et opérateurs stationnaires.

## Exercice 1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice circulante suivante de taille $N$

$$U = \begin{pmatrix} u_0 & u_{N-1} & u_{N-2} & \dots & u_1 \\ u_1 & u_0 & \dots & \dots & u_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-2} & & \dots & u_0 \end{pmatrix},$$

que l'on suppose inversible.

Soit $B = (b_0\, b_1 \cdots b_{N-1})^T \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{C})$ quelconque. Résoudre le système $UX = B$ en utilisant la transformation de Fourier discrète. *Indication : on pourra définir la suite de $\ell_N$, $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$.*

## Exercice 2

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice circulante suivante de taille $N$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Que représente $J$ en terme d'opérateur de Fourier ?
2. Montrer que $J^n = I$.
3. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{N}}$.
   a) En déduire que $J$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donner ses valeurs propres.
   b) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\mathcal{E}_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})$ est un vecteur propre pour $J$ associé à la valeur propre $\omega^k$.
4. Montrer que toute matrice circulante $C$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme en $J$.
5. En déduire que la base $(\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_{n-1})$ est aussi une base de diagonalisation pour $C$.
6. Retrouver le théorème du cours : toute matrice circulante est diagonalisable dans une base orthogonale.

## Exercice 3

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que l'impulsion unitaire $\delta \in \ell_N$, $\delta(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$, pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ est l'identité par rapport à la convolution, i.e. $z * \delta = z$, pour tout $z \in \ell_N$.
2. Soit $T : \ell_N \to \ell_N$ un opérateur. Déduire de la question précédente que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   a) $T$ est stationnaire,
   b) $T$ est un opérateur de convolution de la forme $T_z : \ell_N \to \ell_N$, $T_z(w) = z * w$.

   Montrer que dans ce cas $z = h$, où $h = T(\delta)$ est la réponse impulsionnelle de $T$.

**Exercice 4** Analyse des opérateurs stationnaires.

1. Pour chacun des opérateurs stationnaires $T : \ell_4 \to \ell_4$ suivants :

   a) $(Tz)(n) = 3z(n-2) + iz(n) - (2+i)z(n+1)$,

   b) $(Tz)(n) = 3z(n-1) + z(n)$,

   écrire la répresentation matricielle $A$ de $T$, calculer la réponse impulsionnelle $h = T(\delta)$, écrire $T$ comme opérateur de convolution $T_h$, comme multiplicateur de Fourier $T_{\hat{h}}$ et en déduire l'action de $T$ en tant que filtre fréquentiel. Diagonaliser $T$ sur la base orthogonale de Fourier et calculer les valeurs propres de $T$.

2. Diagonaliser les opérateurs stationnaires suivants avec la technique de Fourier et donner une interprétation fréquentielle :

   a) $T : \ell_4 \to \ell_4$, $(Tz)(n) = z(n) + 2z(n+1) + z(n+3)$,

   b) $T : \ell_2 \to \ell_2$, $N \in \mathbb{N}$, $(Tz)(n) = z(n+1) - z(n)$ (opérateur de *différence en avant*),

   c) $T : \ell_N \to \ell_N$, $N \in \mathbb{N}$, $(\Delta z)(n) = z(n+1) - 2z(n) + z(n-1)$ (version discrète de la *dérivée seconde*).

3. Résoudre le système d'équations différentielles suivante :

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 + y_4 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_3' = y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_4' = y_1 + y_3 - 2y_4. \end{cases}$$

   *Indication : écrire le système sous forme matricielle et diagonaliser la matrice du système avec la méthode de Fourier..*

4. On considère le *système dynamique discret* défini par l'équation $z_{n+1} = Az_n$, avec $z_n \in \ell_4$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_0 = (1, 0, -i, 1)^t$ et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i & -2i & 0 \\ 0 & -1 & i & -2i \\ -2i & 0 & -1 & i \\ i & -2i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $z_{20}$. *Indication : diagonaliser $A$ avec la méthode de Fourier..*