Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
Transformée de Fourier et applications

Feuille de TD n°2

DFT : définitions et premières propriétés.

Exercice 1

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère la famille $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, ..., \mathcal{E}_{N-1})$ d'éléments de ℓ_N, avec $\mathcal{E}_m(n) = e^{2\pi i \frac{mn}{N}}$.

1. Montrer que pour tout $j, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, on a la formule :

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{j-k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n \frac{k-j}{N}} = N\delta_{j,k} = \begin{cases} N & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

2. Montrer que $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_0, ..., \mathcal{E}_{N-1})$ est une base orthogonale de ℓ_N.

3. Expliciter les bases $\mathcal{E}$ de ℓ_2 et ℓ_4.

4. Donner les matrices W_N et W_N^{-1} associées à la DFT et à la IDFT dans le cas $N = 2$ et $N = 4$.

Exercice 2

Démontrer que, pour tout $z \in \ell_N$ les formules de périodicité suivante sont valides :

$$\hat{z}(m+N) = \hat{z}(m), \quad \check{z}(n+N) = \check{z}(n), \qquad \forall m, n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

En déduire que les définitions de $\hat{z}(m)$ et $\check{z}(n)$ peuvent être étendues à tout l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $z \in \ell_N$ quelconque. Montrer les formules suivantes :

1. $\widehat{z^*}(m) = \hat{z}(-m)^*$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. En déduire que z est réel si et seulement si $\hat{z}(m) = \hat{z}(-m)^* = \hat{z}(N-m)^*$.

2. $\hat{\hat{z}}(n) = Nz(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. C'est à dire, appliquer deux fois la DFT correspond à changer le signe à la variable de z et multiplier par N le résultat. On dit que $\frac{1}{N}\text{DFT}^2$ est l'**opérateur de parité**.

3. En déduire que $\frac{1}{N^2}\text{DFT}^4 = id_{\ell_N}$ et l'expression de la matrice W_N^4.

4. En déduire les valeurs propres de la DFT.

Exercice 4

Soit $N \geqslant 1$ et $0 \leqslant k < N$. Soit $z \in \ell_N$ la suite périodique telle que $z(0) = z(1) = \dots = z(k-1) = 1$ et $z(k) = z(k+1) = \dots = z(N-1) = 0$.

1. Calculer la transformée de Fourier discrète de z.

2. En déduire le calcul de la somme

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n k}{N}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)}.$$

Exercice 5

Soit $z = (1, 0, -3, 4)^t \in \ell_4$.

1. Calculer $\hat{z} = W_4 z$. Observer que les composantes de $\hat{z}$ sont complexes même si z a seulement de composantes réelles et vérifier la validité de la propriété (1) de l'exercice 3.

2. Vérifier que $W_4^{-1}\hat{z} = z$.

3. Répéter les mêmes calculs avec $z = (1, i, 2+i, -3)^t$.

Exercice 6

Soient $z = (1,1,0,2)^t$ et $w = (i,0,1,i)^t$:

1. Calculer la convolution $z * w$.
2. Calculer $\hat{z}$, $\hat{w}$ et $\widehat{z * w}$.
3. Vérifier que $\widehat{z * w}(m) = \hat{z}(m)\hat{w}(m)$.

Exercice 7

1. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ une fonction N-périodique, $N \in \mathbb{N}$:
$$f(n + aN) = f(n) \qquad \forall a, n \in \mathbb{Z}.$$
Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:
$$\sum_{n=m}^{m+N-1} f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$
2. **DFT et translation**
Soit $z \in \ell_N$ et soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
$$\widehat{R_k z}(m) = e^{-2\pi i \frac{mk}{N}}\, \hat{z}(m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z},$$
où $R_k(z) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est la suite translatée définie par la formule :
$$R_k z(n) = z(n-k) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$
3. **DFT et convolution**
Soient $z, w \in \ell_N$. Montrer que :
$$DFT(z * w)(m) = \hat{z}(m) \cdot \hat{w}(m) \Longleftrightarrow (z * w)(n) = IDFT(\hat{z} \cdot \hat{w})(n) \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z},$$
$$IDFT(\hat{z} * \hat{w})(n) = N z(n) \cdot w(n) \Longleftrightarrow (\hat{z} * \hat{w})(m) = N\, DFT(z \cdot w)(m) \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 8

On considère le signal audio continu
$$z(t) = 3 \sin\left(2\pi \frac{7t}{512}\right) - 4 \cos\left(2\pi \frac{8t}{512}\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Écrire le signal audio de ℓ_{512} généré par 512 échantillons de $z(t)$ pris à intervalle de temps 1.
2. Déterminer $\hat{z}$ en utilisant seulement les formules de Euler.
3. Dessiner les coefficients de Fourier de z dans le plan complexe.
4. Dessiner et analyser le spectre d'amplitude de $\hat{z}$ pour interpréter le contenu fréquentiel de z : y a-t-il une prévalence de hautes ou basses fréquences en z ?

Exercice 9

Soit $z \in \ell_N$. On définit sa fonction d'autocorrélation par
$$\forall h \in \mathbb{Z}, \rho(h) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \bar{z}_{k-h}.$$
On note $\hat{z}$ la DFT de z. Montrer que
$$\forall h \in \mathbb{Z}, \rho(h) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{z}_k|^2\, e^{\frac{2i\pi hk}{N}}.$$