Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

License 3$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2022-2023
Transformée de Fourier et applications

Feuille de TD n°1

Espaces vectoriels complexes avec produit scalaire.

Exercice 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. Soit $u, v \in E$. On souhaite montrer que

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \, \|v\| . \tag{1}$$

1. On suppose dans un premier temps que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$. Montrer que (1) est vraie. *Indication : on pourra considérer la fonction polynomiale $P : t \in \mathbb{R} \mapsto \langle u + tv, u + tv\rangle$.*
2. On suppose maintenant que $\langle u, v\rangle \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que l'on peut se ramener à la première question en considérant $\tilde{u} = \frac{\overline{\langle u, v\rangle}}{|\langle u, v\rangle|} u$ et $\tilde{v} = v$. Conclure.

Exercice 2
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormale de E.
1. Montrer que pour tout $u \in E$, $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i\rangle \, u_i$.
2. Montrer que pour tout $u, v \in E$, $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i\rangle \, \overline{\langle v, u_i\rangle}$. C'est l'identité de Parceval.
3. Montrer que pour tout $u \in E$, $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle u, u_i\rangle|^2$. C'est l'identité de Plancherel.

Exercice 3
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de E, avec $u_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $p \leqslant n$. On considère le sous-espace vectoriel de E, $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$. On définit pour tout $u \in E$

$$p_F(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle u, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i,$$

que l'on appelle projecteur orthogonal sur F.
1. Quelle est la dimension de F ?
2. Vérifier que p_F est un endomorphisme de E.
3. Que vaut le noyau $\mathrm{Ker}(p_F)$ de p_F ?
4. Que vaut l'image $\mathrm{Im}(p_F)$ de p_F ? *Indication : on pourra montrer que pour tout $u \in F$, $p_F(u) = u$.*
5. En déduire que $\mathrm{Ker}(p_F)$ et $\mathrm{Im}(p_F)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 4
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire complexe euclidien et les trois vecteurs :

$$u = (0, i, 2i), \quad v = (2i, 0, -i), \quad w = \left(0, i, \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2} i}\right).$$

1. Déterminer les relations d'orthogonalité entre les vecteurs u, v, w.
2. Calculer la norme de u, v, w et les distances euclidiennes entre eux.
3. Vérifier que (u, v, w) est une base (non orthogonale) de $\mathbb{C}^3$.
4. Soit S le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ engendré par u et w. Calculer la projection orthogonale de v sur S, qu'on écrit $p_S(v)$. Calculer la distance euclidienne entre v et sa projection sur S, i.e. $d(v, p_S(v))$ et vérifier qu'elle minimise la distance entre v et tous les vecteurs de S (suggestion : considérer la distance au carré).

5. À partir de (u, v, w), déterminer une base orthogonale et une base orthonormale de $\mathbb{C}^3$ en utilisant $p_S(v)$.
6. Appliquer la procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (u, v, w) pour construire une base orthonormale de $\mathbb{C}^3$. Que peut-on observer par rapport à la base orthonormale construite dans 5. ?
7. Étant donné le vecteur $a = (2i, -1, 0)$, écrire la décomposition de a et l'identité de Plancherel par rapport à la base orthonormale déterminée dans la question 5. En déduire le vecteur de la base orthonormale qui a le poids le plus important dans la décomposition de a.

Exercice 5

On considère $\mathbb{C}^3$ munit de son produit scalaire hermitien canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & T(z_1, z_2, z_3) = \left(\frac{z_1 + z_2}{\sqrt{2}}, \frac{-iz_1 + iz_2}{\sqrt{2}}, iz_3 \right), \end{array}$$

1. Déterminer la matrice A associée à T via la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et la matrice inverse A^{-1}.
2. Démontrer que A est une matrice unitaire.
3. Déterminer la valeur du produit scalaire $\langle T(0, 3i, -i), T(1, 1, i) \rangle$, sans calculer $T(0, 3i, -i)$ et $T(1, 1, i)$.
4. Déterminer deux bases orthonormales de $\mathbb{C}^3$ à partir de A.

Exercice 6

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ -i & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telles que $D = U^{-1}AU$.
Même question avec

$$B = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$