Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Partiel du 19 mars 2025. Durée 1h ou 1h20 pour les tiers-temps.

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$, la boule $B(x,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et la boule $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$. Ces résultats n'ont pas à être redémontrés.

Exercice 1 (12 points)

Soient $r > 0$, $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| < r\}$, $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| \leqslant r\}$, $D_2 = B((0,0),2r)$ et $D = D_1 \cup D_2$.

1. Représenter D.
2. Montrer, uniquement à partir de la définition, que D_0 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer si D_1 est un fermé ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer l'intérieur de D_2.
5. Déterminer l'adhérence de D_2 (un dessin accompagnant votre démonstration sera apprécié).
6. Proposer un candidat $\Omega \subset D$ pour l'intérieur de D et montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
7. Représenter $D \setminus \Omega$.
8. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x,y) \in \mathring{D} \setminus \Omega$ avec $y \geqslant 0$. Montrer une contradiction à l'aide de la caractérisation métrique de l'intérieur. On admet que le cas où $y < 0$ est également impossible. Conclure.
9. Donner sans justification l'adhérence de D.

Exercice 2 (4.5 points)

Dans les deux cas suivants, vérifier que $(0,0) \in \overline{D_f}$, où D_f est le domaine de définition de f à préciser, puis étudier l'existence d'une limite finie de f en ce point, et le cas échéant, la calculer.

1. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{y\sin(y^2)}{x}$
2. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sqrt{-(xy)^3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 3 (4.5 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \|(3x,y)\|_2$. Déterminer les lignes de niveau de f puis en tracer quelques unes. Calculer les applications partielles de f en $(0,0)$. Tracer le graphe de f.