Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Partiel du 20 mars 2024. Durée 1h ou 1h20 pour les tiers-temps.

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (3 points)

Soient $u \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Déterminer les limites des suites v et w définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{4n\arctan(n)}{n+2}a \quad \text{et} \quad w_n = \frac{3^{-n}u_n}{1+\|u_n\|_2}.$$

Correction.

1. Méthode 1 : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha_n a$ avec $\alpha_n = \frac{4n\arctan(n)}{n+2}$ (donc $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) or $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi$ donc α tend vers 2π. Par opération sur les limites, v tend vers $2\pi a$.
Méthode 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|v_n - 2\pi a\|_2 = \left(\dfrac{4n\arctan(n)}{n+2} - 2\pi\right)\|a\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc v tend vers $2\pi a$.
(1.5pt)

2. Si on écrit $w_n = \beta_n u_n$ avec $\beta_n = \frac{3^{-n}}{1+\|u_n\|_2}$, la suite réelle β tend vers 0 mais on ne peut conclure par manque d'information sur u. En revanche, on peut intuiter la limite en observant que $(3^{-n})_n$ tend vers 0 et que $\left(\frac{u_n}{1+\|u_n\|_2}\right)_n$ est une suite vectorielle bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|w_n\|_2 = 3^{-n}\dfrac{\|u_n\|_2}{1+\|u_n\|_2} \leqslant 3^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $\|u_n\|_2 \leqslant 1 + \|u_n\|_2$ d'où $\dfrac{\|u_n\|_2}{1+\|u_n\|_2} \leqslant 1$).
Ainsi w tend vers $\vec{0} \in \mathbb{R}^d$. (1.5pt)

Exercice 2 (11 points)

Soient $r > 0$ et $D = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+) \cap B((0,0), r)$. On se propose dans cet exercice de déterminer l'intérieur et l'adhérence de D.

1. Déterminer si $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ est un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer, uniquement à l'aide de la définition d'ouvert, que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter D.
4. Soit $\Omega = (\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*) \cap B((0,0), r)$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que $\Omega = \mathring{D}$ (on pourra supposer par l'absurde qu'il existe $(x, y) \in \mathring{D} \setminus \Omega$).
6. Proposer un candidat F pour l'adhérence de D et déduire des questions précédentes qu'il est bien un fermé de $\mathbb{R}^2$.
7. Montrer que $F = \overline{D}$ (un dessin accompagnant votre raisonnement sera apprécié).

Correction.

1. Soit $u = (x_n, y_n)_n \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $(\ell_x, \ell_y) \in \mathbb{R}^2$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \geqslant 0$ on a par passage à la limite $\ell_y \geqslant 0$ d'où $\ell \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. D'après la caractérisation séquentielle des fermés, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$. (1.5pt)
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et posons $r' = y$. Alors $r' > 0$ et $B((x, y), r') \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. En effet, pour tout $(x', y') \in B((x, y), r')$, $|y - y'| \leqslant \|(x, y) - (x', y')\| < r'$ donc $y' > y - r = 0$ donc $(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. (1.5pt)
3. D est l'intersection du demi-plan (bord inclus) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geqslant 0\}$ avec la boule ouverte $B((0, 0), r)$. (1pt)
4. Ω est l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ donc lui-même un ouvert de $\mathbb{R}^2$. (1pt)
5. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Omega \subset D$ donc $\Omega \subset \mathring{D}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(x, y) \in \mathring{D} \backslash \Omega$. Puisque $(x, y) \in \mathring{D}$ et $\mathring{D} \subset D$, $y \geqslant 0$ et puisque $(x, y) \notin \Omega$, $y \leqslant 0$ donc $y = 0$. De plus, d'après la caractérisation de l'intérieur, il existe $r_0 > 0$, $B((x, y), r_0) \subset D$. Or $(x, -\frac{r_0}{2}) \in B((x, y), r_0)$ et $(x, -\frac{r_0}{2}) \notin D$. Contradiction. Finalement, $\Omega = \mathring{D}$. (2.5pt)
6. Posons $F = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap \overline{B}((0, 0), r)$. Puisque $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\overline{B}((0, 0), r)$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$, leur intersection F l'est également. (1pt)
7. Soit $(x, y) \in F \setminus D$. On a $F \setminus D = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap (\overline{B}((0, 0), r) \setminus B((0, 0), r))$. Il s'agit du demi-cercle de rayon r situé au-dessus de l'axe (Ox). On a donc $y \geqslant 0$ et $\|(x, y)\|_2 = r$.
Méthode 1 : La suite $\left((1 - \frac{1}{n})(x, y)\right)_n$ tend vers (x, y) car $\left\|(x, y) - (1 - \frac{1}{n})(x, y)\right\|_2 = \left\|\frac{1}{n}(x, y)\right\|_2 = \frac{1}{n}\|(x, y)\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Elle est à valeurs dans D car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 - \frac{1}{n})y \geqslant 0$ et
$\left\|(1 - \frac{1}{n})(x, y) - (0, 0)\right\|_2 = (1 - \frac{1}{n})\|(x, y)\|_2 = (1 - \frac{1}{n})r < r$. D'après la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a donc bien $\overline{D} = F$.
Méthode 2 : pour tout $r' > 0$, $B((x, y), r') \cap D \neq \emptyset$. En effet, $(1 - \frac{r'}{2r})(x, y) \in B((x, y), r')$ car $\left\|(x, y) - (1 - \frac{r'}{2r})(x, y)\right\|_2 = \frac{r'}{2r}\|(x, y)\|_2 < r'$ et $(1 - \frac{r'}{2r})(x, y) \in D$ car $\left\|(1 - \frac{r'}{2})(x, y)\right\|_2 = (1 - \frac{r'}{2r})r < r$ et $(1 - \frac{r'}{2})y > 0$. (2.5pt) (bonus graphique : .5 pt)

Exercice 3 (4.5 points)
Dans les deux cas suivants, vérifier que $(0, 0)$ appartient à l'adhérence du domaine de définition de f puis étudier l'existence d'une limite de f en ce point, et le cas échéant, la calculer.

1. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy^2 \cos(x)}{3x^2 + y^2}$
2. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{3x^2}{\sqrt{-y}}$

Correction.

1. $f : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}$ et $(0, 0) \in \overline{(\mathbb{R}^2)^*}$ car la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*} \in ((\mathbb{R}^2)^*)^{\mathbb{N}^*}$ tend vers $(0, 0)$. (.75pt)
Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^*$, $|3x^2 + y^2| \geqslant x^2 + y^2$ et $|\cos(x)| \leqslant 1$ donc $|f(x, y)| \leqslant \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^3}{\|(x,y)\|_2^2} = \|(x, y)\|_2$ donc $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$. (1.5pt)
2. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ et $(0, 0) \in \overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*}$ car la suite $(0, -\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-^*)^{\mathbb{N}^*}$ tend vers $(0, 0)$. (.75pt)
Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(0, x) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $f(x, -x^4) = 3 \xrightarrow[x \to 0]{} 3$ donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. (1.5pt)

Exercice 4 (3 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3 - \|(x, y)\|_2$. Déterminer les lignes de niveau de f puis en tracer quelques unes. Calculer une des applications partielles de f. Tracer le graphe de f.

Correction.
Le graphe sera tracé en CM : c'est un cône de sommet en $(0, 0, 3)$. (1pt)
Pour tout $a > 3$, $D_a = \emptyset$. $D_3 = \{(0, 0)\}$ et pour tout $a < 3$, $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - a\}$ est le cercle de rayon $3 - a$. Par exemple, D_2 est le cercle unité. (0.75+0.75pt)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{|y=0}(x) = f(x, 0) = 3 - |x|$. (0.5pt)