Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Partiel du 20 mars 2024. Durée 1h ou 1h20 pour les tiers-temps.

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (3 points)
Soient $u \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Déterminer les limites des suites v et w définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$v_n = \frac{4n \arctan(n)}{n+2} a \quad \text{et} \quad w_n = \frac{3^{-n} u_n}{1 + \|u_n\|_2}.$$

Exercice 2 (11 points)
Soient $r > 0$ et $D = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \cap B((0,0), r)$. On se propose dans cet exercice de déterminer l'intérieur et l'adhérence de D.

1. Déterminer si $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ est un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer, uniquement à l'aide de la définition d'ouvert, que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Représenter D.
4. Soit $\Omega = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cap B((0,0), r)$. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
5. Montrer que $\Omega = \mathring{D}$ (on pourra supposer par l'absurde qu'il existe $(x, y) \in \mathring{D} \setminus \Omega$).
6. Proposer un candidat F pour l'adhérence de D et déduire des questions précédentes qu'il est bien un fermé de $\mathbb{R}^2$.
7. Montrer que $F = \overline{D}$ (un dessin accompagnant votre raisonnement sera apprécié).

Exercice 3 (4.5 points)
Dans les deux cas suivants, vérifier que $(0,0)$ appartient à l'adhérence du domaine de définition de f puis étudier l'existence d'une limite de f en ce point, et le cas échéant, la calculer.

1. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy^2 \cos(x)}{3x^2 + y^2}$
2. $f : (x, y) \mapsto \dfrac{3x^2}{\sqrt{-y}}$

Exercice 4 (3 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3 - \|(x, y)\|_2$. Déterminer les lignes de niveau de f puis en tracer quelques unes. Calculer une des applications partielles de f. Tracer le graphe de f.