Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Fonctions de plusieurs variables - Groupe 2 - Interro blanche

Exercice 1

Notons $D = (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}_+)$.

1. Représenter D.

2. Soit $\ell = (0,0)$. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, convergeant vers ℓ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.

3. Montrer que D n'est pas un ouvert.

4. (♣) Question supplémentaire : montrer que D est fermé. En déduire $\overline{D}$.

Correction.

1.

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (e^{-n}, 0)$. Alors la suite u est bien à valeurs dans D car la première coordonnée de ses éléments est toujours strictement positive et la seconde nulle, donc $u_n \in \mathbb{R}_+ \times \{0\} \subset D$. Puis comme $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, la suite u tend vers $(0,0)$. Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq (0,0)$ car $e^{-n} > 0$.

3. Supposons par l'absurde que D soit ouvert. Soit $(x,y) \in D$, alors il existe $r > 0$ tel que $B((x,y),r) \subset D$. En particulier $\left(x + \frac{r}{2}, y + \frac{r}{2}\right) \in B((x,y),r)$ donc $\left(x + \frac{r}{2}, y + \frac{r}{2}\right) \in D$. Or comme $(x,y) \in D$, on déduit en particulier que $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, d'où $x + \frac{r}{2} > 0$ et $y + \frac{r}{2} > 0$. Mais comme $\left(x + \frac{r}{2}, y + \frac{r}{2}\right) \in D$, on doit avoir nécessairement $x + \frac{r}{2} = 0$ ou $y + \frac{r}{2} = 0$. Absurde. Donc D n'est pas ouvert.

4. Méthode 1 : générale. Notons $F_1 = \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ et $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}_+$ de sorte que $D = F_1 \cup F_2$. On montre par la caractérisation séquentielle des fermés que F_1 et F_2 sont fermés. Par exemple pour F_1 : soit $u = ((u_n^{(1)}, u_n^{(2)}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de F_1 qui converge vers $\ell = (\ell^{(1)}, \ell^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^{(1)} \geqslant 0$, donc par passage à la limite dans l'inégalité, on a $\ell^{(1)} \geqslant 0$, et $u_n^{(2)} = 0$, donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\ell^{(2)} = 0$. Ainsi $\ell \in F_1$, donc par la caractérisation séquentiel des fermés, F_1 est fermé.

Or nous avons les résultats suivants

> Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $O_1, \ldots, O_p$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Alors $O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_p$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Dit autrement, toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ [1].
> Et par corollaire, toute union finie de fermés de $\mathbb{R}^d$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$.
>
> *Preuve.* Posons $O = \bigcap_{i=1}^{p} O_i$ et montrons que O est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in O$, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $x \in O_i$ et O_i est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. Posons $r = \min(\{r_1, \ldots, r_p\}) > 0$. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, on a $B(x,r) \subset B(x, r_i)$ puisque $r \leqslant r_i$, donc $B(x,r) \subset O_i$. Et ainsi $B(x,r) \subset O$. D'où O est bien un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
> Prouvons le corollaire. Soit $F_1, \ldots, F_p$ des fermés de $\mathbb{R}^d$. Alors par définition, $F_1^c, \ldots, F_p^c$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$, et donc par ce qui précède $F_1^c \cap \ldots F_p^c$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Or $F_1^c \cap \ldots F_p^c = (F_1 \cup \ldots \cup F_p)^c$. Donc $F_1 \cup \ldots \cup F_p = ((F_1 \cup \ldots \cup F_p)^c)^c$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$, en tant que complémentaire d'un ouvert.

Ainsi d'après ce qui précède, $D = F_1 \cup F_2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ comme union finie de fermés de $\mathbb{R}^2$.

Méthode 2 : moins fondamentale (prétexte pour réviser des choses vues en Analyse 3). Soit u une suite d'éléments de D convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^2$. Alors par définition on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in F_1$ ou $u_n \in F_2$. Ainsi $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \in F_1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \in F_2\}$. Comme $\mathbb{N}$ est infini, on a donc $I = \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \in F_1\}$ est infini ou $J = \{n \in \mathbb{N} \,/\, u_n \in F_2\}$ est infini. Supposons par exemple que J soit infini. Alors par le résultat d'existence d'extractrice sous contrainte, il existe φ extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in J$ i.e. $u_{\varphi(n)} \in F_2$. Or u_φ, en tant que sous suite d'une suite convergente [2], converge également vers ℓ. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} = (x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in \mathbb{R}^2$. Alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in F_2$, on a $x_{\varphi(n)} = 0$ et $y_{\varphi(n)} \geqslant 0$. Ainsi par passage à la limite, on obtient $\ell_1 = 0$ et $\ell_2 \geqslant 0$, i.e. $\ell \in F_2$ et donc $\ell \in D$.

---

1. Attention, cette proposition n'est plus vraie si l'intersection est infinie. Par contre toute réunion (quelconque) d'ouverts reste un ouvert. Ces deux propriétés satisfaites par les ouverts font en fait parties des axiomes les définissant. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_topologique`

2. Nous généralisons ici aux suites de $\mathbb{R}^d$ le résultat vu en Analyse 3 dans le cas des suites réelles ou complexes. Vous pouvez reprendre la preuve réalisée au premier semestre qui s'adapte directement en remplaçant les valeurs absolues (ou modules) par (par exemple) la norme 2.

Le cas où cette fois I est infini se traite de la même manière et on obtient $\ell \in F_1$, d'où de nouveau $\ell \in D$. Par conséquent, par la caractérisation séquentielle des fermés, D est fermé.

Comme D est fermé, c'est donc le plus petit fermé contenant D, d'où $\overline{D} = D$.