Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence 2ème année, Mathématiques et Applications
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Examen du 22 mai 2024. Durée 1h15 ou 1h40 pour les tiers-temps.

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points)

Représenter $D = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| < 1\}$. Donner, sans démonstration mais avec quelques explications brèves, l'intérieur et l'adhérence de D que l'on notera respectivement $\mathring{D}$ et $\overline{D}$.

Correction.
On peut encore voir D comme l'union de deux bandes horizontales et sans bord : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \in]-1, 0[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \in]0, 1[\}$. On peut aussi voir D comme la bande horizontale $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ privée des droites d'équation $y = -1$, $y = 0$ et $y = 1$.
$\mathring{D} = D$ car D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (on peut montrer que son complémentaire est l'union de trois fermés).
$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| \leqslant 1\} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ (on peut montrer que cet ensemble est fermé puis construire pour tout point (x, y) tel que $y \in \{-1, 0, 1\}$ une suite $(x, y_n) \in D^N$ telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$; attention, la suite définie par $y_n = \frac{1}{n}$ doit être considérée pour $n \geqslant 2$ pour avoir $(x, y_n) \in D$).

Exercice 2 (4.5 points)

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $g : (u, v) \mapsto f(u - v, \frac{u}{v^2})$. Déterminer le domaine de définition de g et après avoir justifié leur existence exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.

Correction.
g est définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ (.25pt). $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et en posant $\varphi : (u, v) \mapsto (u - v, \frac{u}{v^2})$ alors $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \mathbb{R}^2)$ car en notant φ_1 et φ_2 ses applications coordonnées, φ_1 est polynomiale et φ_2 est une fraction rationnelle. Ainsi par composition, $g = f \circ \varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ (.75pt) donc ses dérivées partielles existent sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (.5pt) (ainsi que celles de φ et celles de f sur $\mathbb{R}^2$). On a pour tout $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v))\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v))\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(u - v, \frac{u}{v^2}) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y}(u - v, \frac{u}{v^2})(1.5pt)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v))\\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(u - v, \frac{u}{v^2}) - 2\frac{u}{v^3}\frac{\partial f}{\partial y}(u - v, \frac{u}{v^2})(1.5pt)\end{aligned}$$

On obtient le même résultat en passant par les matrices jacobiennes :

$$\begin{aligned}J_g(u, v) &= J_{f\circ\varphi}(u, v) = J_f(\varphi(u, v))J_\varphi(u, v)\\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u - v, \frac{u}{v^2}) & \frac{\partial f}{\partial y}(u - v, \frac{u}{v^2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{v^2} & -\frac{2u}{v^3} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(u - v, \frac{u}{v^2}) + \frac{1}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y}(u - v, \frac{u}{v^2}) & -\frac{\partial f}{\partial x}(u - v, \frac{u}{v^2}) - \frac{2u}{v^3}\frac{\partial f}{\partial y}(u - v, \frac{u}{v^2}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 3 (12.5 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(y^2)e^{x^2} + 3x^2 - 1$.

1. a) Déterminer les dérivées partielles de f.
   b) Déterminer l'ensemble des valeurs $y \in \mathbb{R}$ telles que $(0, y)$ soit un point critique de f.
   c) Déterminer la nature locale de $(0, 0)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x^2 + y^2 - 1$.
   a) Montrer uniquement à partir de la définition que $(0, 0)$ est un minimiseur global de g sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Tracer quelques lignes de niveau de g puis son graphe.
   c) Montrer que
$$f(x, y) = g(x, y) + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}(\|(x, y)\|_2^2).$$
   d) En déduire un lien entre les graphes de f et g. Est-ce cohérent avec la question 1.c) ?

Correction.

1. a) Par composée de fonctions usuelles, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc ses dérivées partielles existent (.5pt). On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\sin(y^2)e^{x^2} + 6x \quad \text{ et } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\cos(y^2)e^{x^2}.(1pt)$$
   b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Le point $(0, y)$ est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(0, y) = (0, 0)$. D'après la question précédente,
$$\nabla f(0, y) = (0, 0) \iff (0, 2y\cos(y^2)) = (0, 0).$$
   Ainsi, $(0, y)$ est un point critique si $y = 0$ ou si $y^2 \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, *i.e.* si
$$y \in \{0\} \cup \{(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \,/\, k \in \mathbb{N}, n \in \{0, 1\}\}$$
   (attention à ne pas écrire $\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$ avec $k < 0$). (1.5pt)
   c) D'après la question précédente, $(0, 0)$ est un point critique de f(.25pt). De plus, puisque f est de classe C^2, elle admet des dérivées partielles secondes et une matrice hessienne en tout point (.25pt). On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(y^2)e^{x^2} + 4x^2\sin(y^2)e^{x^2} + 6 & 4xy\cos(y^2)e^{x^2} \\ 4xy\cos(y^2)e^{x^2} & 2\cos(y^2)e^{x^2} - 4y^2\sin(y^2)e^{x^2} \end{pmatrix}.(1pt)$$
   En particulier, $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de cette matrice sont 6 et 2 donc **strictement** positives donc $(0, 0)$ est un minimiseur local de f. (1pt)
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x^2 + y^2 - 1$.
   a) On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geqslant 0$, $y^2 \geqslant 0$ donc $g(x, y) \geqslant -1 = g(0, 0)$ donc $(0, 0)$ est un minimiseur global de g sur $\mathbb{R}^2$. (1pt)
   b) Les ensembles de niveau de g sont les suivants
   —si $a < -1$, $D_a = \emptyset$,
   —$D_{-1} = \{(0, 0)\}$ est réduit à un point,
   —si $a > -1$, $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x^2 + y^2 = a + 1\}$ est une ellipse de grand axe selon (Oy) et de petit axe selon (Ox).

   Pour tracer D_0, on peut remarquer que $(0, 1) \in D_0$ et $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \in D_0$ (et $\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{2}$).
   On peut de plus utiliser les applications partielles $f_{|x=0} : y \mapsto y^2 - 1$ et $f_{|y=0} : x \mapsto 3x^2 - 1$. (3pt)
   Attention à ne pas tracer un cône renversé, la fonction est de classe C^2 donc son graphe s'aplatit au voisinage de son minimiseur $(0, 0)$.

c) Puisque $(0,0)$ est un point critique de f, on a par développement limité

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(0,0) + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}(\|(x,y)\|_2^2) \\
&= -1 + \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} 6x \\ 2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}(\|(x,y)\|_2^2) \\
&= g(x,y) + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}(\|(x,y)\|_2^2)\,.(2pt)
\end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, les graphes de f et g ont la même allure au voisinage de $(0,0)$. Il est donc cohérent que le point $(0,0)$ soit un minimiseur local de ces deux fonctions. (1pt) Attention, $f-g$ n'est pas nulle au voisinage de $(0,0)$ donc les graphes ne sont pas exactement identiques. La fonction g est seulement une approximation de la fonction f au voisinage de $(0,0)$.