Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères, 75006, Paris.

Licence $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Examen du 22 mai 2024. Durée 1h15 ou 1h40 pour les tiers-temps.

Aucun document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points)
Représenter $D = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| < 1\}$. Donner, sans démonstration mais avec quelques explications brèves, l'intérieur et l'adhérence de D que l'on notera respectivement $\mathring{D}$ et $\overline{D}$.

Exercice 2 (4.5 points)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $g : (u, v) \mapsto f(u - v, \frac{u}{v^2})$. Déterminer le domaine de définition de g et après avoir justifié leur existence exprimer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 3 (12.5 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(y^2)e^{x^2} + 3x^2 - 1$.

1. a) Déterminer les dérivées partielles de f.
   b) Déterminer l'ensemble des valeurs $y \in \mathbb{R}$ telles que $(0, y)$ soit un point critique de f.
   c) Déterminer la nature locale de $(0, 0)$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x^2 + y^2 - 1$.
   a) Montrer uniquement à partir de la définition que $(0, 0)$ est un minimiseur global de g sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Tracer quelques lignes de niveau de g puis son graphe.
   c) Montrer que
   $$f(x, y) = g(x, y) + \underset{(x,y)\to(0,0)}{o}(\|(x, y)\|_2^2)\,.$$
   d) En déduire un lien entre les graphes de f et g. Est-ce cohérent avec la question 1.c) ?