Université Paris Cité
L2 Mathématiques et Applications
2024-2025

Devoir maison - Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

Soit $v \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ une suite. Déterminer si la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n v_n}{2 + \|3v_n\|_2}$ est bornée.

Exercice 2

Soient $L > 0$ et $r > 0$. Représenter les ensembles suivants (annoter chaque dessin avec les variables qui le caractérisent ; tracer les bords inclus par des traits pleins et les bords non inclus par des tirets)

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x - x_0| < L\}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \min(x, y) \geqslant L\}$.
3. $D = B((0, 0), r) \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)$.
4. $D = B((x, y), r) \cap \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \,/\, y' > y\}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$.
5. $D = B(x, 2r) \setminus B(x, r)$ avec $x \in (\mathbb{R}_-^*)^2$.
6. $D = B(x, r) \cup \overline{B}(x', r)$ avec $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|x - x'\|_2 = r$.

Exercice 3

Soient $L > 0$, $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geqslant L\}$, $D_2 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $D = D_1 \cap D_2$.

1. Représenter D.
2. Proposer un candidat $F \subset \mathbb{R}^2$ pour l'adhérence de D et montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\overline{D} = F$.
4. Proposer un candidat $\Omega \subset D$ pour l'intérieur de D et montrer, uniquement à l'aide de la définition d'un ouvert, que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En déduire que $\Omega \subset \mathring{D}$.
5. Supposer par l'absurde qu'il existe $(x, y) \in \mathring{D} \setminus \Omega$ et montrer une contradiction à l'aide de la caractérisation de l'intérieur. Conclure.