Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Fonctions de plusieurs Variables

TD n°1

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, étudier l'existence d'une limite pour $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$, et le cas échéant, la calculer.

7. $f:(x,y)\mapsto \frac{\ln(1+x^2y)}{y}$.

8. Version modifiée de la 7. : $f:(x,y)\mapsto \frac{\ln(1+x^2y)}{xy}$.

Correction.

7. Note de la rédaction. Cette question s'est révélée être plus difficile qu'anticipée. C'est pourquoi elle sera remplacée dans des versions futures de la feuille de TD par la question 8 proposée ici. La technique utilisée à plusieurs reprises dans la feuille de TD et correspondant à la "méthode 1" rédigée ci-dessous dans la correction de la question 8. n'est pas applicable sans quelques adaptations pour résoudre la 7. C'est pourquoi il est proposé ci-dessous une résolution plus générique de la 7. incorporant directement un développement limité dans le raisonnement. Cependant ce n'est pas dans l'esprit de ce que nous faisons pendant ce semestre et par conséquent n'est pas exigible en évaluations.

On a $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2y>-1 \text{ et } y\neq 0\}$. On a bien $(0,0)\in\overline{D_f}$ car la suite $\left(\left(0,\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, d'éléments de D_f, tend vers $(0,0)$. Il est donc légitime d'étudier l'existence de la limite de f en $(0,0)$. On a $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim} u$ *i.e.* il existe V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et $\delta:V\to\mathbb{R}$ tel que pour tout $u\in V\cap]-1,+\infty[$, $\ln(1+u)=u\delta(u)$ et $\lim\limits_{u\to 0}\delta(u)=1$.

V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, donc il existe $\varepsilon>0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$. Comme on a $x^2y\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ (car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x^2y|\leqslant\|(x,y)\|_2^3$), il existe $r>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B((0,0),r)$, $x^2y\in]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$. Donc pour tout $(x,y)\in B((0,0),r)\cap D_f$

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+x^2y)}{y}=\frac{x^2y\delta(x^2y)}{y}=x^2\delta(x^2y).$$

Comme δ tend vers 1 en 0 et $x^2y\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$, par composé de limites, $\delta(x^2y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}1$. Puis $x^2\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ (car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x^2|\leqslant\|(x,y)\|_2^2$), donc par produit de limites, $f(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$.

8. On a $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2y>-1 \text{ et } xy\neq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2y>-1\}\cap(\mathbb{R}^*)^2$. On a bien $(0,0)\in\overline{D_f}$ car la suite $\left(\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, d'éléments de D_f, tend vers $(0,0)$.

Méthode 1[1]. Notons $g:t\in]-1,+\infty[\setminus\{0\}\mapsto\frac{\ln(1+t)}{t}$. On a $\lim\limits_{t\to 0}g(t)=1$ car $\ln(1+t)\underset{t\to 0}{\sim}t$. Puis pour tout $(x,y)\in D_f$, $f(x,y)=xg(x^2y)$. Or $x^2y\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ donc, par composée de limites, $g(x^2y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}1$. Puis $x\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ (car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leqslant\|(x,y)\|_2$), donc par produit de limites, $f(x,y)=xg(x^2y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$.

Méthode 2 (non exigible) : on reprend le même raisonnement que dans la question précédente et les mêmes notations. Le début est identique. On a donc pour tout $(x,y)\in B((0,0),r)\cap D_f$

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+x^2y)}{xy}=\frac{x^2y\delta(x^2y)}{xy}=x\delta(x^2y).$$

Comme δ tend vers 1 en 0 et $x^2y\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$, par composé de limites, $\delta(x^2y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}1$. Puis $x\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$ (car pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x|\leqslant\|(x,y)\|_2$), donc par produit de limites, $f(x,y)=x\delta(x^2y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$.

1. La méthode 1 correspond à la méthode déjà pratiquée à plusieurs reprises dans la feuille de TD.