Université Paris Cité

Analyse 3

Licence Mathématiques et Informatique 2^{e} année

1er semestre 2023-2024

Quentin Denoyelle - quentin.denoyelle@u-paris.fr
Irène Kaltenmark - irene.kaltenmark@u-paris.fr

19 décembre 2023

Ce qui est présenté en cours magistral (CM) peut différer par certains points du contenu de ce polycopié. Les examens se feront uniquement sur la base de ce qui aura été vu en classe. Certains passages de ce polycopié, marqué du symbole ♠, sont réservés à une seconde lecture.

Nous remercions Éric Luçon qui est à l'origine de ce polycopié.

Table des matières

Chapitre 0

La démonstration en langage mathématiques

0.1 Table des lettres grecques

L'alphabet grec, utilisé de façon constante dans ce polycopié (et dans toute la suite de vos études !), est rappelé ci-dessous.

Lettre	**Minuscule**	**Majuscule**	**Lettre**	**Minuscule**	**Majuscule**
alpha	α	A	nu	ν	N
beta	β	B	xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	rho	ρ	P
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	θ	Θ	upsilon	υ	Y
iota	ι	I	phi	φ	Φ
kappa	κ	K	khi (ou chi)	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mu	μ	M	omega	ω	Ω

Table 1 – Table des lettres grecques

0.2 Remarques préliminaires sur l'usage des quantificateurs logiques

Le but de ce cours est d'introduire et de manipuler les notions élémentaires de l'analyse. Beaucoup de notions vues ici (réels, suites de réels, convergence d'une suite, continuité d'une fonction, comparaison asymptotique, etc.) ont souvent déjà été abordées au lycée ou en première année de Licence. Simplement, ces notions ont pour la plupart été introduites de façon informelle ou non rigoureuse. Par exemple : comment définissez-vous qu'une suite (u_n) a pour limite l quand $n \to \infty$? Comment définissez-vous qu'une fonction f est continue sur un intervalle[1] ?

Ainsi, la nouveauté de ce cours sera de formaliser et de démontrer proprement les résultats, à l'aide notamment de quantificateurs logiques, tels que "il existe" ($\exists$), "pour tout" ($\forall$), l'implication ($\Rightarrow$), l'équivalence ($\Leftrightarrow$), etc, dont nous rappelons brièvement l'usage dans cette remarque introductive.

De l'usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Il est important de comprendre qu'un même énoncé mathématique peut s'écrire de plusieurs manières, toutes équivalentes. Prenons un exemple : si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels, l'énoncé

La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée,

peut soit s'écrire sous forme littérale :

$$\text{Il existe } M \in]0,+\infty[\text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M, \tag{P_1}$$

soit à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$:

$$\exists M \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M. \tag{P_2}$$

Attention!

Les symboles $\exists$ et $\forall$ ont un sens mathématique précis et ne sont pas de simples abréviations qu'il serait possible d'utiliser à tort et à travers dans vos copies. En particulier, tout mélange obscur entre les formulations (P_1) et (P_2) est à proscrire : soit on écrit tout de manière littérale, soit on écrit tout avec $\exists$ et $\forall$, mais on ne mélange pas les formulations.

Attention!

Dans (P_2), on écrit " $\exists M \in]0,+\infty[,\ \ldots$", mais jamais "$\exists M, \ldots$" tout seul : il faut préciser l'ensemble auquel appartient M (ici l'intervalle $]0,+\infty[$). Notons qu'on aurait

1. on conviendra que toute définition à base de "on trace le graphe de f sans lever le crayon" est à bannir désormais !

très bien pu écrire aussi

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$

Le symbole d'implication $\Rightarrow$

La même remarque s'applique à l'utilisation du symbole d'implication $\Rightarrow$: ce symbole a un sens mathématique précis, ce n'est pas une abréviation qu'il serait possible d'utiliser à tort et à travers. On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N},\ n = 2l)$$

ou bien sous forme littérale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est divisible par 4, alors n est divisible par 2,

mais

Attention!
On n'écrira jamais le symbole $\Rightarrow$ tout seul au milieu d'une copie ! Un conseil : une bonne pratique est finalement de ne pas utiliser le symbole $\Rightarrow$. En effet, il est toujours possible de remplacer la phrase "$P \Rightarrow Q$" par l'expression littérale "si P alors Q". Ces deux phrases ont le même sens et en utilisant la seconde plutôt que la première, vous éviterez le mésusage du symbole $\Rightarrow$.

Le symbole d'équivalence

L'équivalence de P et Q se définit de la façon suivante : on dit que P est équivalent Q (et on écrit $P \Leftrightarrow Q$) si par définition,

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P).$$

L'équivalence exprime le fait que P et Q sont simultanément vrais et simultanément faux.

Attention!
La définition de l'équivalence fournit une méthode de démonstration : montrer une équivalence, c'est montrer successivement les deux implications. Ne pas oublier l'une d'entre elles !

A propos de l'ordre des quantificateurs

$$\text{Il existe } M \in]0,+\infty[\text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M, \qquad (P_1)$$

L'ordre dans lequel sont écrits *il existe* et *pour tout* dans (P_1) est important. Dans l'énoncé (P_1), le réel $M > 0$ est universel : le même M est valable pour n'importe quel élément u_n de la suite :

Dans l'énoncé (P_1), M **ne dépend pas de** n.

A l'inverse, analysons l'énoncé initial où on a inversé les deux quantificateurs :

$$\text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que } |u_n| \leqslant M, \qquad (P_3)$$

ou de façon équivalente à l'aide des quantificateurs :

$$\forall n \geqslant 0,\ \exists M > 0,\ |u_n| \leqslant M.$$

Ici, suivant le sens de la lecture, on introduit d'abord $n \geqslant 0$, puis ensuite $M > 0$: autrement dit,

Dans l'énoncé (P_3), M **dépend ici a priori du choix de** n (pour $n = 1$, il existe un $M_1 > 0$, pour $n = 2$ il existe un $M_2 > 0$ a priori différent de M_1, etc.).

Pour bien faire il faudrait plutôt écrire l'énoncé (équivalent à (P_3))

$$\text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ il existe } M_n > 0 \text{ tel que } |u_n| \leqslant M_n,$$

On comprend alors que l'énoncé (P_3) est très différent de l'énoncé (P_1) : en effet, l'énoncé (P_3) est toujours vrai, quelle que soit la suite considérée (puisque pour tout $n \geqslant 0$, il suffit par exemple de prendre $M_n = |u_n|+1$), alors que l'énoncé (P_1) n'est pas tout le temps vrai : (P_1) est par exemple faux pour $u_n = n$, qui n'est pas une suite bornée.

Attention!

On ne peut pas inverser impunément les quantificateurs “pour tout” et “il existe” dans un énoncé mathématique !

Remarque 0.1: On a cependant le résultat suivant : si X est un ensemble, x, y deux éléments de X et $P(x, y)$ une propriété (valant Vrai ou Faux) dépendant de x et de y, alors

$$[\exists y \in X, \forall x \in X,\ P(x, y)] \Rightarrow [\forall x \in X,\ \exists y \in X,\ P(x, y)]$$

En effet, si il existe un $y \in X$ universel tel que $P(x, y)$ est vérifiée quel que soit $x \in X$, alors ce même y convient pour tout x en particulier. C'est l'implication inverse qui est fausse en toute généralité.

Remarque 0.2: Par contre, il est toujours possible d'inverser deux $\forall$ (ou deux $\exists$) entre eux : les énoncés suivants sont équivalents

$$\forall x \in X, \forall y \in Y,\ P(x, y),$$
$$\forall y \in Y, \forall x \in X,\ P(x, y).$$

Prendre le contraire d'un énoncé mathématique

Comment prendre le contraire, appelé aussi la négation, d'un énoncé mathématique ?

Prendre le contraire d'un énoncé comportant des $\forall$ et $\exists$

La règle est la suivante : si X est un ensemble, x un élément de X et $P(x)$ une propriété (valant Vrai ou Faux) dépendant de x,

$$\begin{aligned}
\text{non}\,(\forall x \in X, P(x)) &= \exists x \in X,\ \text{non} P(x),\\
\text{non}\,(\exists x \in X, P(x)) &= \forall x \in X,\ \text{non} P(x).
\end{aligned}$$

Autrement dit, il s'agit de remplacer chaque $\exists$ par un $\forall$ et chaque $\forall$ par un $\exists$, et de remplacer P par son contraire non P.

Par exemple, le contraire de l'énoncé (P_1) (i.e. *La suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *n'est pas bornée*) est

$$\text{Pour tout } M > 0, \text{ il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } |u_n| > M,$$

ou de façon équivalente à l'aide des quantificateurs :

$$\forall M > 0,\ \exists n \geqslant 0,\ |u_n| > M.$$

Ainsi, dire qu'une suite n'est pas bornée, c'est dire qu'on peut toujours trouver un élément de la suite aussi grand soit-il.

Prendre le contraire d'une implication

La règle est la suivante :

$$\text{Le contraire de “}P \Rightarrow Q\text{” est “}P \text{ et (non } Q)\text{”.}$$

Autrement dit, établir le contraire de “si P alors Q” revient à écrire un contre-exemple, de sorte que P est vrai, mais que Q est faux.

Attention!

Il ne faut confondre le **contraire** de “$P \Rightarrow Q$” (qui est donc “P et (non Q)”) avec la **contraposée** de “$P \Rightarrow Q$”, qui est par définition

$$\text{“non } Q \Rightarrow \text{non } P\text{”.}$$

En effet, la contraposée “non $Q \Rightarrow$ non P” est exactement équivalente à “$P \Rightarrow Q$”.

Un exemple : si P = “il pleut” et Q = “j'ouvre mon parapluie” :

— $P \Rightarrow Q$: s'il pleut, alors j'ouvre mon parapluie.

— La contraposée de $P \Rightarrow Q$ (strictement équivalente à l'énoncé initial) : “si je n'ouvre pas mon parapluie, alors il ne pleut pas”.

— Le contraire de $P \Rightarrow Q$: “il pleut, mais je n'ouvre pas mon parapluie”.

EXERCICE 0.3: Exprimer (uniquement à l'aide P, Q, non, et, ou) le contraire de

$$P \Leftrightarrow Q$$

Ensemble vide et quantificateurs

Si P est une propriété dépendant de x, l'assertion suivante est toujours vraie :

$$\forall x \in \emptyset, P(x).$$

L'assertion suivante est toujours fausse :

$$\exists x \in \emptyset, P(x).$$

Chapitre 1

Propriétés usuelles de l'ensemble des réels

1.1 Relation d'ordre

On admet dans ce chapitre la définition des nombres réels, celles des opérations usuelles (addition et multiplication) et celle de l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : ainsi, on rappelle que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ qui vérifie

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$, (réflexivité)
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (transitivité).

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x < y$ si et seulement si "$x \leqslant y$ et $x \neq y$".

Remarque 1.1: Une représentation naturelle

Lemme 1.2 (Réécriture): *Soient* $x, y \in$

1. $x < y \iff \exists \varepsilon > 0,\ x + \varepsilon = y$
2. $x < y \iff \exists \varepsilon > 0,\ x + \varepsilon < y$
3. $x \leqslant y \iff \exists \varepsilon \geqslant 0,\ x + \varepsilon \leqslant y$
4. $x \leqslant y \iff \exists \varepsilon > 0,\ x < y + \varepsilon.$
5. $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \iff x = 0.$

Démonstration. La preuve est faite en TD. Par la suite vous pourrez utiliser sans justification ces jeux de réécriture (à moins que l'on en demande la démonstration explicite). $\square$

Définition 1.3 (Valeur absolue): *La fonction valeur absolue est définie par*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |x| = \begin{cases} x & si\ x \geqslant 0 \\ -x & si\ x \leqslant 0 \end{cases}.$$

La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes classiques. On sera particulièrement attentif à l'inégalité triangulaire (et l'inégalité triangulaire inverse) qui est un outil fondamental des mathématiques.

Proposition 1.4: *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors*

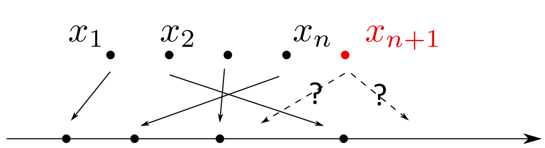
1. $|-x| = |x|$.
2. $|x| \leqslant |y| \Leftrightarrow -|y| \leqslant x \leqslant |y|$.
3. *Inégalité triangulaire :* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
4. *Inégalité triangulaire inverse :* $||x| - |y|| \leqslant |x+y|$.

Démonstration. Voir en TD. □

Proposition 1.5: *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$.*

Exemple 1.6: Exemple : si $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -1)$, on a $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant x_{\sigma(3)}$ lorsque $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$.

Démonstration. Une bijection sur $[\![1, n]\!]$ est une fonction $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!], i \mapsto \sigma(i)$ telle que pour tout $i \neq j$, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ (injectivité) et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = j$ (surjectivité).
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $P(n)$: "pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$".
Initialisation : si $n = 1$, $\sigma = \mathrm{id}$ convient.
Hérédité : supposons P(n) vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\} \subset \mathbb{R}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$ (cf figure).



Si $x_{\sigma(n)} \leqslant x_{n+1}$, alors on peut alors considérer la bijection

$$\tilde{\sigma} : i \mapsto \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \leqslant n \\ n+1 & \text{si } i = n+1 \end{cases}.$$

Sinon, $x_{n+1} < x_{\sigma(n)}$ et $x_{\sigma(n)}$ est alors le plus grand élément de la famille A. On extrait $x_{\sigma(n)}$ et on ordonne les n éléments de $A \setminus \{x_{\sigma(n)}\}$ avec une nouvelle bijection σ_2 en réappliquant P(n). On pose alors :

$$\tilde{\sigma} : i \mapsto \begin{cases} \sigma_2(i) & \text{si } i \neq \sigma(n) \\ \sigma(n) & \text{si } i = n+1 \end{cases}.$$

On laisse en exercice de vérifier que $\tilde{\sigma}$ est bien dans les deux cas une bijection. □

Remarque 1.7: 1. On a exploité dans la preuve précédente que " $\leqslant$ " est une relation d'ordre totale : soit $x_{\sigma(n)} \leqslant x_{n+1}$ soit $x_{n+1} \leqslant x_{\sigma(n)}$.

2. Une bijection sur un ensemble fini s'appelle une permutation.

3. Par la suite, on s'autorisera des énoncés du type : "soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, quitte à permuter, on peut supposer $x \leqslant y \leqslant z$."

1.1.1 Notion d'intervalle

Définition 1.8: *Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \in I$, $y \in I$ et $x \leqslant z \leqslant y$ alors $z \in I$.*

Remarque 1.9: Autrement dit, à partir du moment où un intervalle contient deux réels, il contient par définition tout élément entre ces deux réels.

Exemple 1.10: 1. $\mathbb{R}$ est un intervalle car pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a toujours $z \in \mathbb{R}$ (tautologie).

2. $\{5\}$ est un intervalle car pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $5 \leqslant z \leqslant 5$, on a $z = 5 \in \{5\}$.

3. $\emptyset$ est un intervalle. Pour s'en convaincre on peut réécrire la définition : $I = \emptyset$ est un intervalle ssi
$$\forall x, y \in \emptyset, \forall z \in \mathbb{R}, x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in \emptyset.$$
Or il est impossible d'exhiber une paire $x, y \in \emptyset$ pour construire un contre-exemple à cette assertion, donc elle est vraie. Autrement dit, la condition "si $x \in I$, $y \in I$" de la définition n'est jamais satisfaite.

Contre-exemple 1.11: *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$: $0 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$, mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.*

Proposition 1.12: *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont listés ci dessous.*

1. *L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$,*
$$[a, b] := \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z \leqslant b\}, \tag{1.1.1}$$
$$[a, b[:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z < b\}, \tag{1.1.2}$$
$$]a, b] := \{z \in \mathbb{R},\ a < z \leqslant b\}, \tag{1.1.3}$$
$$]a, b[:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z < b\}. \tag{1.1.4}$$
3. *pour tout $a \in \mathbb{R}$,*
$$]-\infty, a] := \{z \in \mathbb{R},\ z \leqslant a\}, \tag{1.1.5}$$
$$]-\infty, a[:= \{z \in \mathbb{R},\ z < a\}, \tag{1.1.6}$$
$$[a, +\infty[:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z\}, \tag{1.1.7}$$
$$]a, +\infty[:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z\}. \tag{1.1.8}$$

Démonstration. Voir en TD. □

La proposition précédente est forte : non seulement elle dit que les ensembles listés sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (ce qui est facile à vérifier), mais surtout que ce sont les *seuls*. Dit autrement, un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ fait forcément partie de l'une de ces 10 catégories.

1.2 Notions de majorant et de maximum

Définition 1.13: *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$ (autrement dit M est plus grand que tout élément de A).*
2. *De même, on dit que m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$ (i.e. m est plus petit que tout élément de A).*
3. *On dit que A est majoré (resp. minoré) si A admet un majorant (resp. minorant).*

Remarque 1.14: Autrement dit, A est majoré si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \leqslant M.$$

A est minoré si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \geqslant m.$$

Remarque 1.15: Notons que la traduction mathématique de "A n'est pas majoré" est

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a > M.$$

Définition 1.16: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dira que A est borné si et seulement si A est minoré et majoré, autrement dit si*

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ m \leqslant a \leqslant M.$$

Définition 1.17: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit M est le maximum de A (ou plus grand élément de A) et on notera $M = \max(A)$ si*
   - *$M \in A$ et*
   - *M est un majorant de A.*
2. *On dit m est le minimum de A (ou plus petit élément de A) et on notera $m = \min A$ si*
   - *$m \in A$ et*
   - *m est un minorant de A.*

Proposition 1.18: *S'il existe, le maximum de A est nécessairement unique.*

Démonstration. Soit A sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admettant $M_1 \in \mathbb{R}$ et $M_2 \in \mathbb{R}$ comme maxima. Montrons que $M_1 = M_2$: pour cela il suffit de montrer que $M_1 \leqslant M_2$ et $M_2 \leqslant M_1$. M_2 est un maximum pour A. Donc pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant M_2$. C'est en particulier vrai pour M_1 (qui est par définition un élément de A). Donc $M_1 \leqslant M_2$. Par symétrie $M_2 \leqslant M_1$ et donc on a l'égalité. Donc (s'il existe) le maximum de A est nécessairement unique. $\square$

Remarque 1.19: La Proposition 1.18 justifie l'utilisation de l'article "le maximum" au lieu de "un maximum".

Exemple 1.20: 1. $A =]-\infty, 5]$ est majoré par 5 (et par tout réel plus grand que 5), mais n'admet pas de minorant. A admet 5 comme maximum.

2. $B =]-\infty, 5[$ est majoré par 5 (et par tout réel plus grand que 5), mais n'admet pas de maximum.
3. $C =]5, 11[$ admet un majorant (12 par exemple) et un minorant (0 par exemple). C est donc borné. Par contre C n'admet ni maximum ni minimum.

Démonstration. Montrons que $\max A = 5$.
Pour tout $a \in A$, $a \leqslant 5$ et $5 \in A$ donc $\max A = 5$. □

Démonstration. Montrons que B n'admet pas de maximum.
◇ Méthode directe : Pour tout $M \in B$, montrons que M n'est pas un maximum de B. Or si $M \in B$, $M < 5$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M < M + \varepsilon < 5$ (Lemme de réécriture). Alors en posant $b = M + \varepsilon$, on a $b \in B$ et $M < b$ donc M n'est pas un maximum de B. On pouvait aussi considérer un élément explicite comme $b = \frac{M+5}{2}$. Ceci étant vrai pour tout $M \in B$, B n'admet pas de maximum.
◇ Méthode par l'absurde : Supposons que B admette un maximum et notons le M. Alors $M \in B$ donc $M < 5$. Or si $b = \frac{M+5}{2}$, $b \in B$ et $M < b$ donc M n'est pas un maximum de B. Contradiction. □

Notations. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Posons

$$A = u(\mathbb{N}) = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad B = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Alors, lorsque les objets suivants existent, on note

$$\max_{n\in\mathbb{N}} u_n \doteq \max A \quad \text{et} \quad \min_{n\in\mathbb{N}} u_n \doteq \min A$$

$$\max_{x\in I} f(x) \doteq \max B \quad \text{et} \quad \min_{x\in I} f(x) \doteq \min B.$$

Ces notations sont très utilisées en mathématiques et seront rencontrées à de nombreuses reprises. Il est donc important de bien connaître ce qu'elles signifient et à quoi elles font références.

Exemple 1.21: 1. Si $A = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\max(A) = 1$. A est minoré par 0 mais n'admet pas de minimum.

2. Si $A = \{(-1)^n n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, A n'est ni majoré, ni minoré et n'admet ni maximum ni minimum.
3. Si $A = \sin(\mathbb{R})$, on a $\min(A) = -1$ et $\max(A) = 1$.
4. Si $A = \ln([1, +\infty[)$, on a $\min(A) = 0$ et A n'est pas majoré donc A n'admet pas de maximum.
5. Si $A = \arctan(\mathbb{R})$, A est majoré par $\frac{\pi}{2}$ et minoré par $-\frac{\pi}{2}$ mais n'admet ni maximum ni minimum.

Démonstration. Montrons que $A = \arctan(\mathbb{R})$ n'admet pas de minimum.

Admettons que la fonction arctan est la fonction réciproque de la fonction bijective $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ce fait sera revu et démontré dans le chapitre sur les fonctions. On a ainsi $A =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Proposons deux démonstrations, chacunes par l'absurde. Supposons que A admette un minimum et notons le m.

Première démonstration. Alors $m \in A$ donc $-\frac{\pi}{2} < m < \frac{\pi}{2}$. Or si $a = \frac{-\frac{\pi}{2}+m}{2}$ (point milieu entre $-\frac{\pi}{2}$ et m), alors $a \in A$ car $]-\frac{\pi}{2}, m] \subset A$ est un intervalle. Comme de plus $a < m$, donc m n'est pas un minimum de A. Contradiction.

Deuxième démonstration. En utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, le raisonnement est plus simple à rédiger car il n'est plus nécessaire de construire explicitement un $a \in A$ qui amène à la contradiction.

On a de nouveau $m \in A$, donc $-\frac{\pi}{2} < m$. Or puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < f(x) < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$. En particulier pour $\varepsilon < m + \frac{\pi}{2}$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) < m$, donc m n'est pas un minimum puisque $y = \arctan(x) \in A$.

□

On le voit à travers les exemples ci-dessus : tout ensemble n'admet pas forcément de majorant, de minorant, de maximum ou de minimum. Par contre, on a le résultat positif suivant lorsque les ensembles considérés sont non vides finies.

Proposition 1.22: *Tout ensemble fini non vide de* $\mathbb{R}$ *admet un maximum et un minimum.*

Démonstration. Si $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble fini non vide, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A est de cardinal n (on a $n > 0$ car A est non vide).

Première démonstration utilisant la Proposition 1.5. Ainsi il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Quitte à permuter les indices, d'après la Proposition 1.5, on peut supposer $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Alors pour tout $a \in A$, $a \leqslant a_n$ et $a_n \in A$ d'où $\max A = a_n$. De même, $\min A = a_1$.

Deuxième démonstration sans pré-requis. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

tout ensemble de $\mathbb{R}$ de cardinal n admet un maximum et un minimum.

Initialisation : si $n = 1$ alors soit $A \subset \mathbb{R}$ de cardinal 1. On a $A = \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et alors $\max(A) = \min(A) = a$.

Hérédité : supposons maintenant la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble de cardinal $n+1$. Alors il existe $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Notons $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Comme B est de cardinal n, par hypothèse de récurrence, B admet un minimum noté m et un maximum noté M. Or $A = B \cup \{a_{n+1}\}$. Ainsi, si $M \geqslant a_{n+1}$, alors M est plus grand que tous les éléments de A et appartient à B donc à A, donc M est le maximum de A. Sinon $M < a_{n+1}$, et alors c'est a_{n+1} qui est le maximum de A. On procède de la même manière pour le minimum de A. Ceci achève la récurrence, d'où la conclusion. □

Remarque 1.23: La preuve version de la preuve est beaucoup plus rapide que la seconde comme tout le travail a été fait au préalable dans la Proposition 1.5. Vous pouvez également utiliser ce résultat directement dans vos démonstrations puisque c'est un résultat du cours. La seconde preuve est proposée comme illustration du principe de récurrence.

On déduit de cette propriété une redéfinition de valeur absolue.

Définition 1.24: *Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit*

$$|x| := \max\{x, -x\}, \tag{1.2.1}$$

appelée la valeur absolue de x.

Grâce à la valeur absolue, nous pouvons proposer une définition alternative du caractère bornée d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.25: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors A est borné si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant M$.*

Démonstration. Voir Annales TD. □

Nous terminons cette section par un résultat d'ordre *topologique*. Ce dernier affirme que lorsque l'on a une collection finie de réels, il est possible de trouver des intervalles centrés en ces réels, de même tailles (suffisamment petits) et ne se recoupant pas (d'intersections vides).

Proposition 1.26: *Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ des réels distincts deux à deux. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j,\ ]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\cap]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[= \emptyset.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$. Posons $\varepsilon = \frac{L}{4}$ avec $L = \min\{|x_i - x_j| \,/\, i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j\}$. L est bien défini car cet ensemble est fini (de cardinal inférieur à $n(n-1)/2$) et $L > 0$ donc $\varepsilon > 0$. Montrons que les intervalles $]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, sont deux à deux disjoints. Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$ et supposons par l'absurde qu'il existe $x \in]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\cap]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[$. Alors $|x_i - x| < \varepsilon$, $|x_j - x| < \varepsilon$ et $|x_i - x_j| \geqslant L = 4\varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, $4\varepsilon \leqslant |x_i - x_j| = |x_i - x + x - x_j| \leqslant |x_i - x| + |x_j - x| < 2\varepsilon$, contradiction. □

Ce résultat permet, entre autre, de montrer le résultat d'unicité de la limite d'une suite convergente. Voir le chapitre sur les suites.

Nous évoquerons de nouveau quelques résultats de topologie de $\mathbb{R}$ au début du chapitre sur les fonctions.

1.3 Notion de borne supérieure

Définition 1.27: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note*

$$\mathcal{M}(A) := \{M \in \mathbb{R} \,/\, \forall a \in A,\ a \leqslant M\}$$

l'ensemble des majorants de A.

Notons qu'il est possible que $\mathcal{M}(A)$ soit vide. C'est le cas par exemple si $A = [1, +\infty[$.

Définition 1.28: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ admet un minimum, on appelle ce minimum, borne supérieure de A, et on le note* $\sup(A)$. *Ainsi, si elle existe, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.*

Attention!

Une remarque importante : une borne supérieure n'existe pas forcément. Par exemple si l'ensemble des majorants est vide. **Il faudra toujours veiller à justifier l'existence de la borne supérieure avant même de l'évoquer.**

Exemple 1.29: En revenant à l'exemple 1.20, on a : A, B et C admettent des bornes supérieures, $\sup(A) = \sup B = 5$ et $\sup C = 11$.

Par contre $[1, +\infty[$ n'en admet pas, comme l'ensemble de ses majorants est vide.

Notations. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Posons

$$A = u(\mathbb{N}) = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad B = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Alors, lorsque les objets suivants existent, on note

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \doteq \sup A \quad \text{et} \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \doteq \inf A$$

$$\sup_{x\in I} f(x) \doteq \sup B \quad \text{et} \quad \inf_{x\in I} f(x) \doteq \inf B.$$

Le résultat suivant montre que la borne supérieure est tout simplement le maximum quand celui existe. Par contre, on se souviendra qu'une partie non vide majorée n'admet pas forcément un maximum (exemple $[0, 1[$), mais toujours une borne supérieure (comme $\mathbb{R}$ satisfait la propriété de la borne supérieure).

Proposition 1.30: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et* $\max(A) = \sup(A)$.

Démonstration. Voir en TD. □

Exemple 1.31: 1. Si $A = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\max A = 1$ donc $\sup A = 1$.

2. Si $A = \{(-1)^n n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, A n'est pas majoré donc n'admet pas de borne supérieure.

3. Si $A = \sin(\mathbb{R})$, on a $\max A = 1$ donc $\sup A = 1$.

4. Si $A = \ln([1, +\infty[)$, A n'est pas majoré donc n'admet pas de borne supérieure.

5. Si $A = \arctan(\mathbb{R})$, A n'admet pas de maximum mais admet une borne supérieure : $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Montrons que si $A = \arctan(\mathbb{R})$, $\sup A = \frac{\pi}{2}$. Notons $f = \arctan$. Pour tout $a \in A$, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$. A est borné et non vide ($f(0) \in A$), donc admet une borne supérieure.
Montrons que $\sup A = \frac{\pi}{2}$ par double inégalité. D'après l'encadrement précédent, $\frac{\pi}{2}$ est un majorant donc $\sup A \leqslant \frac{\pi}{2}$. Montrons maintenant que $\sup A \geqslant \frac{\pi}{2}$. Posons $y = \sup A$ et supposons par l'absurde que $y < \frac{\pi}{2}$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. En particulier, pour $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - y$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y < f(x)$ (car $y = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$), or $f(x) \in A$ donc y n'est pas un majorant de A. Finalement, $\sup A = \frac{\pi}{2}$. □

On dispose également d'un résultat général d'existence de la borne supérieure.

Théorème 1.32 (Propriété de la borne supérieure): *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Démonstration. On admet ce "théorème". En fait, ce résultat est intrinsèquement lié à la construction de l'ensemble des nombres réels. Il est en effet possible de *construire* (à partir de l'ensemble des rationnels) l'ensemble des nombres réels de telle sorte que la propriété de la borne supérieure soit automatiquement vérifiée. Cette construction dépasse le cadre de ce cours. Nous nous contenterons de voir cette propriété comme un axiome sur l'ensemble des nombres réels. □

Attention!

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que tous les résultats de ce cours découlent essentiellement de cet axiome relatif à la construction de $\mathbb{R}$. C'est donc un résultat fondamental à la cohérence de tout ce qui va suivre !

Exemple 1.33: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, alors $f(\mathbb{R})$ admet une borne supérieure. En effet, par hypothèse il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant M$ d'où $f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant M$. Ainsi, $\operatorname{Im} f$ est majoré et non vide donc admet une borne supérieure d'après la propriété de la borne supérieure.

En résumé, une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ n'admet pas forcément un maximum (exemple $[0, 1[$), mais admet toujours une borne supérieure.

Supposons qu'un réel S soit donné. Comment savoir si c'est la borne supérieur d'un ensemble ? Le résultat suivant donne une caractérisation.

Proposition 1.34 (Caractérisation de la borne supérieure): *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$. Alors S est la borne supérieure de A si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *S est un majorant de A,*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon$.*

Démonstration. Posons $S = \sup(A)$. Alors S est un majorant de A par définition du sup. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A, puisque par définition $S = \sup(A)$ est le plus petit d'entre eux. Donc, par négation de l'assertion $S - \varepsilon$ *est un majorant de* A, on obtient qu'il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Réciproquement, supposons que S vérifient les deux assertions du théorème. D'après 2., A est non vide et d'après 1. A est majorée, donc par la propriété de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe. Montrons que $S = \sup(A)$. S est un majorant de A, donc $\sup(A) \leqslant S$ puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants. Montrons que $S \leqslant \sup(A)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon$. Comme $\sup(A)$ est un majorant de A, $a_\varepsilon \leqslant \sup(A)$ et donc $S - \varepsilon \leqslant \sup(A)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $S \leqslant \sup(A)$. D'où $S = \sup(A)$. □

Exemple 1.35: 1. Soit $A = [0,1]$. Alors 1 est un majorant de A et quelque soit $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = 1$ convient, donc d'après la caractérisation de la borne supérieure $\sup A = 1$. Plus généralement, si S est un majorant de A et $S \in A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = S$ convient donc $\sup A = S$.

Il est néanmoins plus simple et plus intéressant de remarquer, comme déjà fait à plusieurs reprises, que si S est un majorant de A et $S \in A$, S est le maximum de A donc $\sup A = \max A = S$ d'après la Proposition 1.30.

2. Soit $A = \arctan(\mathbb{N})$. Alors $\frac{\pi}{2}$ est un majorant de A. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2}$, ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctan(N_\varepsilon) < \frac{\pi}{2}$ (suite strictement croissante). On a bien $\arctan(N_\varepsilon) \in A$, donc d'après la caractérisation de la borne supérieure $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

1.4 Notion de borne inférieure

La notion de borne inférieure est symétrique de celle de la borne supérieure :

Définition 1.36: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note*

$$\mathcal{I}(A) = \{m \in \mathbb{R} \,/\, \forall a \in A, a \geqslant m\},$$

l'ensemble des minorants de A (possiblement vide). Dans le cas où $\mathcal{I}(A)$ admet un maximum, on appelle ce maximum, borne inférieure de A et on le note $\inf A$. *Ainsi, si elle existe, la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A.*

Exemple 1.37: On a par exemple $\inf(]-5,+\infty[) = -5$, mais aussi $\inf([-5,+\infty[) = -5$. La borne inférieure est toujours bien définie dans ces deux cas. Notons que le minimum n'est pas défini dans le premier cas.

Par contre $]-\infty, 2]$ n'admet pas de borne inférieure, car l'ensemble de ses minorants est vide.

Sans surprise, nous avons le résultat suivant, similaire à la Proposition 1.30, qui affirme que lorsqu'un ensemble admet un minimum alors il admet automatiquement une borne inférieure qui vaut ce minimum.

Proposition 1.38: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et* $\min(A) = \inf(A)$.

Démonstration. La preuve est laissée en exercice d'entraînement. Elle est très similaire à celle vue en TD pour la Proposition 1.30. □

Comme pour la borne supérieure, on a un résultat général d'existence qui est directement lié à la construction de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.39 (Propriété de la borne inférieure): *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Admis. En fait on pourrait déduire cette propriété de celle admise pour la borne supérieure. □

De la même façon que pour la Proposition 1.34, il existe une caractérisation semblable pour la borne inférieure.

Proposition 1.40 (Caractérisation de la borne inférieure): *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne inférieure et $I \in \mathbb{R}$. Alors $I = \inf A$ si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *I est un minorant de A,*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $I \leqslant a_\varepsilon < I + \varepsilon$.*

Démonstration. Démonstration très semblable à celle de la borne supérieure, voir en TD. □

Exemple 1.41: Déterminons, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de $A = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \ / N \in \mathbb{N} \right\}$.

A est l'ensemble des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n!}$. Cette série est à termes positifs donc la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, avec pour tout $N \in \mathbb{N}$ $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$, est croissante et on sait qu'elle converge vers e. Ainsi, pour tout $a \in A$, $S_0 = 1 \leqslant a \leqslant e$.
A est non vide et borné donc d'après la propriété de la borne supérieure et la propriété de la borne inférieure, A admet une borne inférieure et une borne supérieure.
Puisque $S_0 \in A$, A admet un minimum et donc une borne inférieure, et on a $\min(A) = \inf(A) = 1$.
Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = e$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $e - \varepsilon < S_N < e$. Or e est un majorant de A, donc d'après la caractérisation de la borne supérieure : $\sup A = e$.
Puisque $\sup A \notin A$, A n'admet pas de maximum.

1.5 Extension aux nombres complexes

Nous proposons dans cette dernière section de ce chapitre d'étendre certaines notions vues pour les nombres réels au cas des nombres complexes.

Tout d'abord, rappelons que la généralisation de la valeur absolue aux nombres complexes est le module.

Définition 1.42 (Module d'un nombre complexe): *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.*

Remarque 1.43: On peut voir la valeur absolue d'un nombre réel $a \in \mathbb{R}$, comme la distance séparant a de 0. De même, le module d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ représente la distance le séparant de 0 puisque $|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2}$.

Notons également que l'on utilise la même notation que pour la valeur absolue car le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.

En tant qu'objet mesurant des distances, le module satisfait, comme la valeur absolue, l'inégalité triangulaire (et l'inégalité triangulaire inverse).

Proposition 1.44 (Inégalité triangulaire): *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, alors*

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Démonstration. $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z}') = |z|^2+|z'|^2+z\overline{z}'+\overline{z\overline{z}'} = |z|^2+|z'|^2+2\,\mathfrak{Re}(z\overline{z}') \leqslant (|z|+|z'|)^2$. Tous ces modules étant des réels positifs, l'inégalité triangulaire en découle par passage à la racine carrée.
En appliquant cette inégalité à $z = z+z'-z'$, on obtient $|z| = |(z+z')+(-z')| \leqslant |z+z'|+|z'|$. Ainsi $|z|-|z'| \leqslant |z+z'|$ et de même $|z'|-|z| \leqslant |z+z'|$ en échangeant les rôles. D'où l'inégalité triangulaire inverse. □

Il n'est pas possible de définir une relation d'ordre totale sur l'ensemble des nombres complexes qui soit intéressante en pratique [1]. Par conséquent, pour définir la notion d'ensemble borné de $\mathbb{C}$, nous généralisons la définition obtenue à travers la Proposition 1.25 faisant intervenir la valeur absolue (donc dans le contexte présent des nombres complexes, le module), plutôt que la Définition 1.16 travaillant directement avec la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.45: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On dit que A est borné s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $z \in A$, $|z| \leqslant M$.*

Exemple 1.46: Si $A = \{re^{i\theta} \,/\, 0 \leqslant r \leqslant 1, \theta \in [0, 2\pi[\}$, alors A est borné par 1 car pour tout $a \in A$, $|a| = 1$.

Si $A = \{x+iy \,/\, x, y \in \mathbb{R}, |x| \leqslant 1\}$, alors A n'est pas borné car pour tout $M \geqslant 0$, $z = i(M+1) \in A$ et $|z| = M+1 > M$.

Remarque 1.47: Comme le module d'un nombre réel est sa valeur absolue, la notion d'ensemble borné de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sont compatibles entre elles. Précisément, si $A \subset \mathbb{R}$, alors A est borné en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ssi A est borné en tant que sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Terminons par quelques résultats sur les ensembles bornés de $\mathbb{C}$.

Proposition 1.48: *$A \subset \mathbb{C}$ est borné si et seulement si $\{|z| \,/\, z \in A\} \subset \mathbb{R}$ est borné.*

Démonstration. $\{|z| \,/\, z \in A\}$ est borné si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $z \in A$, $|z| \leqslant M$, *i.e.* A est borné. □

Proposition 1.49: *Tout ensemble fini de $\mathbb{C}$ est borné.*

Démonstration. Si $A \subset \mathbb{C}$ est fini, $\{|z| \,/\, z \in A\}$ est un ensemble fini de $\mathbb{R}$, donc borné, donc A est borné (d'après la proposition précédente). □

1. cela dépasse le cadre de ce cours, mais par exemple $(\mathbb{C}, +, \times)$ ne peut être un corps dit ordonné comme $i^2 = -1$, voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Relation_d%27ordre`.

Chapitre 2

Suites réelles et complexes

2.1 Premières définitions

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1: *On appelle suite toute application u de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$:*

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \tag{2.1.1}$$
$$n \mapsto u(n) \tag{2.1.2}$$

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que u est une suite réelle. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que u est une suite complexe.

Définition 2.2: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On note*

$$u(\mathbb{N}) := \{u(n) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$$

l'image de $\mathbb{N}$ par u, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par u.

Remarque 2.3:
1. Plutôt que de noter $u(n)$, il est d'usage d'utiliser la notation u_n.
2. Il s'agit de faire la distinction entre plusieurs objets distincts :
   — La suite u (encore notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou bien $(u_n)_{n \geqslant 0}$) qui est une fonction,
   — L'élément de la suite u_n (pour n fixé) qui est un élément de $\mathbb{K}$.
   — $u(\mathbb{N})$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{K}$, l'ensemble des valeurs prises par u.
3. Parfois, la suite n'est définie que sur un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$: par exemple, la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$; la suite v donnée par $v_n = \ln(n - 99)$ n'a de sens que pour $n \geqslant 100$.

Définition 2.4: *Soient deux suites u et v éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la suite $u + v$ par $(u + v)_n := u_n + v_n$, $n \geqslant 0$ et la suite λu par $(\lambda u)_n = \lambda u_n$, $n \geqslant 0$.*

Proposition 2.5: *L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ munit de ses opérations forment une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

2.1.2 Suites majorées, minorées, monotones

Dans ce paragraphe, toutes les suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.6: *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :*

1. *u est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant M$.*
2. *u est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $m \leqslant u_n$.*
3. *u est bornée si u est majorée et minorée.*

Remarque 2.7: On notera que ces définitions sont en fait équivalentes au fait que l'ensemble image $u(\mathbb{N})$ est majoré (resp. minoré, borné) au sens de la Remarque 1.14.

Proposition 2.8: *Soit u une suite réelle. u est bornée si et seulement si il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M$.*

Démonstration. Cette proposition est la conséquence directe de la remarque précédente et de la Proposition 1.25. □

Proposition 2.9: *Soient u et v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. *Si u et v sont majorées (resp. minorées), alors la suite $u + v$ est majorée (resp. minorée).*
2. *Si $\lambda \geqslant 0$ et si u est majorée (resp. minorée) alors la suite λu est majorée (resp. minorée).*
3. *Si $\lambda \leqslant 0$ et si u est majorée (resp. minorée) alors la suite λu est minorée (resp. majorée).*
4. *Si u et v sont bornées, alors $u + v$, λu et uv (définie par $(uv)_n = u_n v_n$ pour $n \geqslant 0$) sont des suites bornées.*

Démonstration. Voir TD. □

Attention!

La somme d'une suite majorée et d'une suite minorée peut très bien n'être ni majorée, ni minorée : pour $n \geqslant 0$, $u_n = n$ définit une suite minorée (par 0) et $v_n = -2n$ si n est pair et $v_n = 0$ si n est impair, définit une suite majorée par 0. Par contre $(u+v)_n$ vaut $-n$ si n est impair et n si n est pair. Ainsi $u + v$ n'est ni majorée, ni minorée.

Définition 2.10: *Soit u une suite réelle. On dit que*

1. *u est croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,*
2. *u est strictement croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n < u_{n+1}$,*
3. *u est décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,*
4. *u est strictement décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > u_{n+1}$,*

On dit que u est (strictement) monotone si u est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Remarque 2.11: Il existe bien sûr des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, par exemple u définie par $u_n = (-1)^n$.

Proposition 2.12: *Soit u une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\lambda \geqslant 0$: si u est croissante (resp. décroissante) alors λu est croissante (resp. décroissante).*
2. *Si $\lambda \leqslant 0$: si u est croissante (resp. décroissante) alors λu est décroissante (resp. croissante).*

Démonstration. Évident : il suffit de constater que la multiplication par $\lambda \geqslant 0$ conserve le sens d'une inégalité alors que le sens est inversé si $\lambda \leqslant 0$. □

Proposition 2.13: *La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est une suite croissante (resp. décroissante). De plus, l'une d'entre elles est strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors la somme est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Démonstration. On traite le cas de u et v croissantes : ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \leqslant v_{n+1}$. Donc, sommant terme à terme, il vient $u_n + v_n \leqslant u_{n+1} + v_{n+1}$ et donc $u + v$ est croissante. Si de plus u est strictement croissante, alors pour tout $n \geqslant 0$, $u_n < u_{n+1}$ et donc $u_n + v_n < u_{n+1} + v_n \leqslant u_{n+1} + v_{n+1}$. Donc $u + v$ est strictement croissante. □

Attention!

La somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'a en général aucune propriété particulière : u définie par $u_n = 2n + (-1)^n$ pour $n \geqslant 0$ est une suite croissante : en effet, $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 + (-1)^{n+1} - 2n - (-1)^n = 2 + (-1)^{n+1} - (-1)^n \geqslant 0$ (car $|(-1)^n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$). Ensuite v définie par $v_n = -2n$ est décroissante. Mais $u_n + v_n = (-1)^n$ définit une suite ni croissante, ni décroissante.

2.1.3 Notion de propriété "vraie à partir d'un certain rang"

Souvent, une propriété ne sera pas vérifiée pour tout $n \geqslant 0$ mais seulement à partir d'un n suffisamment grand. Plus précisément,

Définition 2.14: *Si P est une propriété sur l'ensemble des suites (par exemple "être une suite croissante" ou bien "être une suite constante"), on dira qu'une suite u vérifie la propriété P*à partir d'un certain rang *(en abrégé APCR) s'il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que la suite restreinte $(u_n)_{n \geqslant r}$ vérifie la propriété P.*

Exemple 2.15:

1. On dira qu'une suite réelle est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $r \geqslant 0$, tel que pour tout $n \geqslant r$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On dit que u est une suite presque nulle si elle est nulle à partir d'un certain rang.

Une notion sera particulièrement utile pour la suite :

Définition 2.16: *Soit u une suite réelle. On dit que la suite u est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant r$, $u_n = a$.*

Proposition 2.17: *Les Propositions 2.12 et 2.13 restent vraies pour les notions de croissance à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Voir TD. □

2.2 Suites convergentes et divergentes

2.2.1 Notion de suite convergente

On définit rigoureusement dans ce paragraphe la notion intuitive, vue depuis le lycée, de convergence d'une suite réelle. Intuitivement, dire que la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$, c'est dire que u prend des valeurs arbitrairement proches de 0, quitte à considérer un rang n suffisamment grand. De manière générale,

Définition 2.18: *Soit u une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que la suite u converge vers l si la propriété suivante est vérifiée :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| < \varepsilon. \tag{2.2.1}$$
Dans ce cas, on notera $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.
2. *On dit u est convergente s'il existe un réel l tel que u converge vers l.*

Remarque 2.19: Explicitons cette définition importante :

1. Notons déjà que
$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$
où $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ est un intervalle centré autour de l de longueur 2ε.
2. Dans (2.2.1), $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, il faut surtout comprendre $\varepsilon > 0$ comme un réel arbitrairement petit.
3. Ainsi, dire que u converge vers l c'est dire que tout intervalle I centré autour de l de longueur arbitrairement petite, on est capable de trouver un rang n_0 suffisamment grand tel que l'intervalle I contient toutes les valeurs de la suite à partir de ce rang n_0 (voir Figure 2.1).

Attention!

Dans la définition de la convergence, le rang n_0 dépend de $\varepsilon > 0$. Deux choix différents de ε donneront des indices n_0 a priori différents. Par exemple, pour $\varepsilon = \frac{1}{10}$, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < \frac{1}{10}$. Si maintenant, on considère $\varepsilon = \frac{1}{100}$, il existe un $n_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|u_n - l| < \frac{1}{100}$. Mais, a priori $n_1 \neq n_2$!

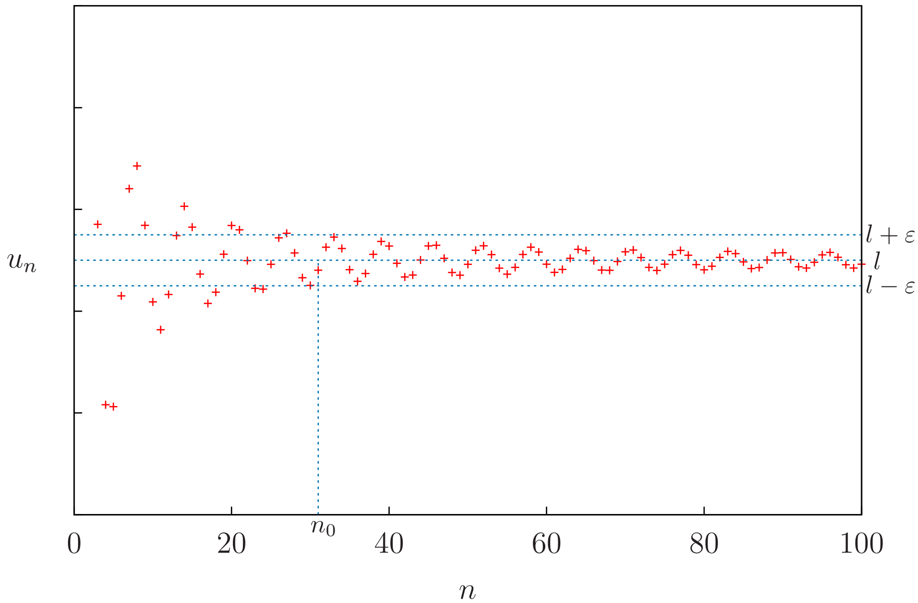


FIGURE 2.1 – La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l : pour tout intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ de longueur arbitraire, il existe un rang n_0 (qui dépend de ε) à partir duquel toutes les valeurs de la suite se trouvent dans cet intervalle.

Voici quelques exemples de suites convergentes.

Exemple 2.20:
— Une suite stationnaire est convergente.
— La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est convergente, de limite $l = 0$. En effet pour $\varepsilon > 0$ arbitraire. Considérons l'entier $n_0 = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$, où E est la fonction partie entière. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $n \geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, $|u_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Nous venons donc de prouver que u est convergente, de limite 0.
— La suite u définie par $u_n = r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $|r| < 1$, qui est une suite géométrique de raison r, converge vers 0. Exemple vu en TD.

2.2.2 Premières propriétés des suites convergentes

La limite d'une suite convergente est nécessairement unique :

Proposition 2.21: *Soit u une suite réelle et l, l' deux réels. Si u est convergente, de limite l et l' alors $l = l'$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers l, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. De même, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l'| < \varepsilon$. Donc pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a grâce à l'inégalité triangulaire

$$0 \leqslant \left|l - l'\right| = \left|l - u_n + u_n - l'\right| \leqslant |u_n - l| + \left|u_n - l'\right| < 2\varepsilon.$$

Ainsi $0 \leqslant |l - l'| < 2\varepsilon$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Nécessairement [1] $|l - l'| = 0$ et donc $l = l'$. $\square$

1. Si ce n'est pas clair, il suffit de supposer par l'absurde que $|l - l'| > 0$ mais alors en prenant $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{4}$, on obtient $0 < |l - l'| < \frac{|l-l'|}{2}$, ce qui est impossible. D'où $|l - l'| = 0$.

Proposition 2.22: *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Voir TD. □

Attention!
La réciproque de cette propriété est fausse : la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée (par 1) mais n'est pas convergente.

2.2.3 Notion de suite divergente

Définition 2.23: *On dit qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente. Ainsi, prenant le contraire de l'énoncé de la Définition 2.18, une suite est divergente si la propriété suivante est vérifiée :*

pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$.

Voici un exemple de suite divergente :

Exemple 2.24: Montrer que la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant 0$ est divergente. En l'état du cours et des connaissances, il faudrait montrer cette assertion en utilisant la définition de la divergence. C'est-à-dire que pour n'importe quel $\ell \in \mathbb{R}$, la suite u admet une infinité d'éléments qui sont éloignés d'au moins un certain $\varepsilon > 0$ fixé. C'est un peu fastidieux (il faut distinguer les cas $\ell = \pm 1$ et $\ell \neq \pm 1$) mais faisable, à faire en exercice. Nous verrons plus tard un outil plus adapté et plus direct pour montrer la divergence de cette suite : la notion de valeur d'adhérence !

Parmi les suites divergentes, on distingue celles qui ont une limite infinie.

Définition 2.25: *Soit u une suite réelle.*

1. *On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si*
$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A \tag{2.2.2}$$
On notera alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
2. *On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si*
$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < -A \tag{2.2.3}$$
On notera alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Exemple 2.26: Soit $r > 1$. Alors la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Les suites qui tendent vers $\pm\infty$ sont bien divergentes d'après la proposition suivante.

Proposition 2.27: *Toute suite réelle u qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est divergente.*

Démonstration. Il suffit de traiter uniquement le cas $+\infty$ (l'autre étant symétrique).

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Considérons $A > \ell$, alors comme u tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n > A$. Comme $A > \ell$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A > \ell + \varepsilon_0$ (prendre par exemple $\varepsilon_0 = \frac{A-\ell}{2}$). Soit $n_1 \in \mathbb{N}$, alors pour $n_2 = \max(n_0, n_1) \geqslant n_1$, on obtient $u_{n_2} > A > \ell + \varepsilon_0$ c'est-à-dire $u_{n_2} \notin]\ell - \varepsilon_0, \ell + \varepsilon_0[$. Donc u est une suite divergente. □

Remarque 2.28: On distingue donc deux types de suites divergentes :

1. les suites qui ont une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$),
2. les suites qui n'ont pas de limite (finie ou infinie).

2.2.4 Opérations sur les limites

Proposition 2.29 (Opérations sur les suites convergentes): *Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$.*

1. *La somme $u + v$ est convergente, de limite $l + l'$.*
2. *La suite produit $uv = (u_n v_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente de limite ll'.*
3. *Si de plus $l' \neq 0$, alors*
   (a) *v est non nulle à partir d'un certain rang,*
   (b) *la suite inverse de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{1}{l'}$,*
   (c) *la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{l}{l'}$.*

Démonstration. Voir TD. □

Proposition 2.30 (Produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0): *Soit $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est bornée et v est convergente de limite 0, alors la suite uv tend vers 0.*

Démonstration. Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de la suite v vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| = |v_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. Mais alors pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n v_n - 0| = |u_n| |v_n| \leqslant M |v_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Ainsi, nous venons de montrer que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. □

Exemple 2.31: La suite de terme général $w_n = \frac{(-1)^n \cos(n)^3 - \arctan(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente de limite 0 car w_n est le produit de

— $u_n = (-1)^n \cos(n)^3 - \arctan(n)$ qui définit une suite bornée (par $1 + \frac{\pi}{2}$), et de

— $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est une suite qui tend vers 0.

Proposition 2.32 (Opérations sur les suites divergentes): *Soient u et v deux suites réelles, $l \in \mathbb{R}$.*

1. *Si u converge vers $l > 0$ (resp. $l < 0$) et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$),*

2. *Règle des signes : si* $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, +1\}$ *sont deux signes quelconques, si* u *tend vers* $(\eta_1)\infty$ *et* v *tend vers* $(\eta_2)\infty$*, alors* uv *tend vers* $(\eta_1\eta_2)\infty$*.*
3. *Si* u *converge vers* l *et si* v *tend vers* $+\infty$ *(ou* $-\infty$*), alors la suite des quotients* $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ *est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite* 0*.*
4. *Soient* u *et* v *deux suites réelles. Si* u *est minorée et si* v *tend vers* $+\infty$*, alors* $u+v$ *tend vers* $+\infty$*. En particulier, si* u *est convergente et si* v *tend vers* $+\infty$*, alors* $u+v$ *tend vers* $+\infty$*.*

Démonstration. Voir TD. □

Remarque 2.33:

1. En ce qui concerne le cas $l = 0$ pour l'item 1. du résultat précédent, on ne peut rien conclure : $0 \times \infty$ est une forme indéterminée. Ainsi, pour $u_n = \frac{1}{n}$, u est une suite convergente qui tend vers 0 et :
   - pour $v_n = \sqrt{n}$ (qui définit une suite divergente), alors $u_n v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
   - pour $w_n = n$ (qui définit une suite divergente), alors $u_n w_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
   - pour $z_n = n^2$ (qui définit une suite divergente), alors $u_n z_n = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.
2. Les cas "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" et "$+\infty - \infty$" sont aussi des formes indéterminées : on laisse au lecteur construire des exemples simples où toutes limites sont possibles pour ces deux situations.

Les tableaux ci-dessous résument les règles de calcul de limites concernant les suites somme et produit :

$u_n \xrightarrow{n\to\infty}$ \ $v_n \xrightarrow{n\to\infty}$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée	$-\infty$

FIGURE 2.2 – Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$ selon la nature des suites u et v.

$u_n \xrightarrow{n\to\infty}$ \ $v_n \xrightarrow{n\to\infty}$	$l' < 0$	$l' = 0$	$l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	Forme Indéterminée	Forme Indéterminée
$l > 0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

FIGURE 2.3 – Limite de la suite de terme général $u_n v_n$ selon la nature des suites u et v.

2.2.5 Limites et inégalités

Le premier résultat de ce paragraphe est que le passage à la limite entre suites convergentes conserve le sens des inégalités, mais transforme les inégalités strictes en inégalités larges :

Proposition 2.34: *Soient u et v deux suites réelles. On suppose que u et v convergent vers respectivement $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$. Alors on a $\ell \leqslant \ell'$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$, en particulier $\ell - \varepsilon < u_n$. De même, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|v_n - \ell'| < \varepsilon$ et en particulier, $v_n < \ell' + \varepsilon$. Donc pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n < \ell' + \varepsilon$. En particulier, $\ell < \ell' + 2\varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $\ell \leqslant \ell'$. □

Attention!

L'inégalité stricte $u_n < v_n$ n'est pas nécessairement conservée à la limite : si $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1$, on a $u_n < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$ mais il y a égalité des limites ($= 1$).

Voici un résultat similaire à la précédente proposition dans le cas où les suites tendent vers $\pm\infty$ (énoncé ici seulement dans le cas $+\infty$).

Proposition 2.35: *Soient u et v deux suites réelles. On suppose que les deux assertions suivantes sont vraies :*

— *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$,*

— *u tend vers $+\infty$.*

Alors v tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$. Mais alors $v_n \geqslant u_n > A$ et donc v tend vers $+\infty$. □

Exemple 2.36: Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2+\sin(n)+3}{4n+1} + \cos(n)$. On a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \frac{n^2+2}{4n+1} - 1 := v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Remarque 2.37: Les inégalités dans les énoncés des Propositions **??** et **??** peuvent être supposées vraies seulement à partir d'un certain rang sans que les conclusions ne soient modifiées.

Théorème 2.38 (Théorème des gendarmes): *Soient u, v, w trois suites réelles. On suppose les hypothèses suivantes :*

— *pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), on a l'inégalité $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,*

— *Les suites u, w convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.*

Alors la suite v converge vers l.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$. En particulier, on a $l - \varepsilon < u_n$. De même, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|w_n - l| < \varepsilon$ et donc en particulier $w_n < l + \varepsilon$. On a donc pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$l - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < l + \varepsilon.$$

C'est exactement dire que v est convergente, de limite l. □

Exemple 2.39: Soit $u_n = \frac{n+(-1)^n}{3n+2}$. Alors $\frac{n-1}{3n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{3n+2}$. Or $\frac{n-1}{3n+2}$ définit une suite convergente de limite $\frac{1}{3}$. De plus $\frac{n+1}{3n+2}$ définit une suite convergente de même limite $\frac{1}{3}$. Donc par théorème des gendarmes, la suite u est convergente, de limite $\frac{1}{3}$.

2.2.6 Limites et suites monotones, suites adjacentes

On s'intéresse ici au cas des suites monotones. Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 2.40 (Limite monotone): *Soit u une suite réelle. Si u est croissante et majorée, alors u est convergente. Si on note alors $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.*

Démonstration. Comme u est majorée, l'ensemble $u(\mathbb{N}) = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ (et bien sûr non vide). Ainsi, par la propriété de la borne supérieure, $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure, que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ puisque ℓ est un majorant de $u(\mathbb{N})$.

Montrons que u est convergente, de limite ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \ell$. Mais alors, pour tout $n \geqslant n_0$, comme u est croissante, il vient $\ell - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant \ell$, c'est-à-dire $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. La suite u est donc bien convergente, de limite ℓ.

Le cas u suite décroissante est très similaire, il faut cette fois considérer la borne inférieure de l'ensemble $u(\mathbb{N})$. La preuve est laissée en exercice (bon entraînement pour vérifier que la preuve est comprise !). □

Étudions maintenant le cas d'une suite croissante mais non majorée.

Proposition 2.41: *Soit u une suite réelle. Si u est croissante et non majorée, alors u a pour limite $+\infty$.*

Démonstration. Soit $A > 0$. Comme u est non majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. Mais alors comme u est croissante, on a pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$. On a donc bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

On a donc deux possibilités pour le comportement asymptotique d'une suite croissante comme le résume le corollaire suivant.

Corollaire 2.42: *Toute suite réelle croissante est soit convergente ou soit admet comme limite $+\infty$.*

Démonstration. Si la suite croissante est majorée, alors d'après le Théorème 2.40 de la limite monotone elle est convergente. Sinon elle n'est pas majorée et par la Proposition 2.41, elle admet pour limite $+\infty$. □

Les deux résultats précédents se déclinent évidemment dans le cas où la suite est décroissante au lieu de croissante.

Proposition 2.43: *Soit u une suite réelle.*

1. *Si u est décroissante et minorée, alors elle converge et elle est minorée par sa limite.*
2. *Si u est décroissante et non minorée, alors elle admet pour limite $-\infty$.*

Démonstration. Il suffit de considérer la suite $v = -u$ et d'appliquer les résultats précédents. □

Exemple 2.44: La suite définie sur $\mathbb{N}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente. En effet, la suite u est croissante (c'est une somme de termes positifs). De plus, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 3.$$

Ainsi u est majorée. Par le résultat précédent, u est convergente. On pourrait montrer que $e \approx 2,718$ est sa limite.

Remarque 2.45: Une caractéristique majeure du théorème de la limite monotone est de montrer l'existence d'une limite pour une suite (croissante ou décroissante) *sans même connaitre la limite a priori* !

Remarque 2.46: Le théorème de la limite monotone est fondamental car il dépend intrinsèquement de la nature de $\mathbb{R}$: le fait que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure est équivalent au fait que $\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la limite monotone (c'est-à-dire que les suites à valeurs réelles qui sont croissantes et majorées convergent). L'ensemble $\mathbb{R}$ en est en fait complètement caractérisé : il n'y a qu'un seul corps (à isomorphisme près) totalement ordonné qui satisfait ce théorème (ou de manière équivalente la propriété de la borne supérieure).

Une application des résultats précédents sur les suites monotones concerne la notion de suites adjacentes.

Définition 2.47: *Soient u et v deux suites réelles. On dira que les suites u et v sont* adjacentes *si les assertions suivantes sont vraies :*

1. *u est croissante*
2. *v est décroissante*
3. *la différence $v_n - u_n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.*

Proposition 2.48: *Soient u et v deux suites réelles. Si u et v sont adjacentes, alors les deux suites sont convergentes, de même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.*

Démonstration. Soient u et v deux suites adjacentes. Prouvons d'abord que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant v_n$: en effet, la suite de terme général $v_n - u_n$ est décroissante (comme somme de deux suites décroissantes v et $-u$) et convergente vers 0 par hypothèse. Elle est donc minorée par sa limite : $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et donc $v_n \geqslant u_n$. Par conséquent, par croissance de u et décroissance de v, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Donc u est croissante, majorée par v_0 donc convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$. De plus v est décroissante, minorée par u_0, donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$. Reste à montrer que $l = l'$: comme u et v convergent, la suite de terme général $(v_n - u_n)$ converge aussi vers $l' - l$. Or par hypothèse, cette limite vaut 0. Donc $l = l'$. Enfin, comme u est croissante, elle est majorée par sa limite : $u_n \leqslant l$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, v décroissante implique $l \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$. □

2.3 Comparaison asymptotique de suites

La motivation de ce paragraphe est de fournir des outils/notations permettant de comparer deux suites quand $n \to \infty$.

2.3.1 Défintions

Définition 2.49: *Soient u et v deux suites réelles.*

1. *On dit que u_n est négligeable devant v_n pour $n \to +\infty$, et on note $u_n = o_{n\to\infty}(v_n)$, s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang).*
2. *On dit que u_n est équivalente à v_n pour $n \to \infty$ (et on note $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$) s'il existe une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 pour $n \to \infty$ telle que $u_n = \delta_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang).*

Proposition 2.50 (Définition équivalente dans le cas où $v_n \neq 0$ APCR): *Soient u et v deux suites réelles telle que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Alors*

1. *$u_n =_{n\to\infty} o(v_n)$ pour $n \to \infty$ si et seulement si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ (définie APCR) tend vers 0 pour $n \to \infty$.*
2. *$u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ pour $n \to \infty$ si et seulement si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ (définie APCR) tend vers 1 pour $n \to \infty$.*

Démonstration. C'est évident, par division par $v_n \neq 0$ dans la définition précédente. □

Remarque 2.51: La Définition 2.49 a été écrite dans le cas général où v peut s'annuler. Cependant, c'est bien la Proposition 2.50 qu'il faut retenir dans les cas pratiques. Le principe est le suivant : par exemple pour étudier la proximité asymptotique des suites u et v (voir si elles sont équivalentes), on regarde le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ et on le compare à la valeur 1.

La proposition précédente est aussi très utile pour vérifier un équivalent ou voir si un o est correct : il suffit de faire le quotient et regarder s'il tend vers 1 (cas équivalent) ou 0 (cas o).

Il est possible de réécrire la notion de convergence d'une suite à l'aide des notations $\sim$ et o.

Proposition 2.52: *Soit u une suite réelle. On a ainsi*

$$u_n =_{n\to\infty} o(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

et

$$u_n \sim_{n\to\infty} l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = l, \ \textit{si } l \neq 0.$$

Attention!
L'équivalence précédente est fausse pour $l = 0$: une suite équivalente à 0 est une suite stationnaire (égale à 0 à partir d'un certain rang). Par exemple, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mais $\frac{1}{n}$ n'est pas équivalente à 0 !

Remarque 2.53: Pour une suite donnée, il n'y a pas unicité d'un équivalent : $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} 1$ mais aussi $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2n^2}$. En fait, tout développement de Taylor de la fonction cos à un ordre arbitraire fournit un équivalent de $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to \infty$. Plus l'ordre du développement sera élevé, plus la précision de l'équivalent fourni sera grande.

2.3.2 Règles de calculs

Proposition 2.54 (Règles de calculs avec les "o"): *Soient u, v, w trois suites réelles.*

1. *Transitivité des "o" :* $u_n =_{n\to\infty} o(v_n), \ v_n =_{n\to\infty} o(w_n) \Rightarrow u_n =_{n\to\infty} o(w_n)$,
2. *Stabilité des "o" par addition :* $u_n =_{n\to\infty} o(v_n), \ w_n =_{n\to\infty} o(v_n) \Rightarrow u_n + w_n =_{n\to\infty} o(v_n)$,
3. *Stabilité des "o" par produit :* $u_n =_{n\to\infty} o(v_n), \Rightarrow u_n w_n =_{n\to\infty} o(v_n w_n)$.

Démonstration. Voir TD. □

Proposition 2.55 (Règles de calculs avec les "∼"): *Soient u, v, w, t quatre suites réelles.*

1. *Réflexivité :* $u_n \sim_{n\to\infty} u_n$,
2. *Symétrie :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Rightarrow v_n \sim_{n\to\infty} u_n$,
3. *Transitivité :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n, \ v_n \sim_{n\to\infty} w_n \Rightarrow u_n \sim_{n\to\infty} w_n$,
4. *Passage à l'inverse :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n, \ u_n, v_n \neq 0 APCR \ \Rightarrow \frac{1}{u_n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n}$,
5. *Passage à la puissance :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim_{n\to\infty} v_n^\alpha$, *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est fixé*
6. *Produit terme à terme :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n, \ w_n \sim_{n\to\infty} t_n \Rightarrow u_n w_n \sim_{n\to\infty} v_n t_n$,

Démonstration. Voir TD. □

Attention!
On ne peut pas additionner deux équivalents : pour $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$, on a

$$u_n \sim_{n\to\infty} n^2, \text{ et } v_n \sim_{n\to\infty} -n^2$$

mais
$$u_n + v_n = n \not\sim n^2 - n^2 = 0.$$

2.3.3 Comportements asymptotiques standards

La proposition suivante montre que deux suites équivalentes ont nécessairement la même limite en $+\infty$, si elle existe. Ceci va dans le sens de l'idée que deux suites équivalentes "se ressemblent" asymptotiquement.

Proposition 2.56: *Soit u, v deux suites réelles telles que $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

Démonstration. Voir TD. □

Attention!
Vous remarquerez que l'on autorise la valeur $l = 0$ dans la propositition précédente. Il n'y a aucun soucis ici, car on a écrit nulle part qu'une suite était équivalente à 0 !

Il est (très) important d'avoir en tête l'échelle des infiniment petits et des infiniment grands. Ceci est rappelé dans la proposition suivante, où on note $u_n \ll v_n$ à la place de $u_n = o(v_n)$.

Proposition 2.57: *On a pour les infiniment petits :*

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1, \tag{2.3.1}$$

et pour les infiniment grands :

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n! \ll n^n. \tag{2.3.2}$$

Remarque 2.58: Dans la précédente proposition, l'échelle a été donnée seulement pour quelques suites classiques. On peut écrire plus généralement par exemple que $n^a = o(n^b)$ dès que $a < b$, ou encore $r^n = o(r'^n)$ dès que $0 < r < r'$.

2.4 Notion de suite extraite ; valeur d'adhérence

2.4.1 Définitions et premiers exemples

Intuitivement, la notion de suite extraite d'une suite u consiste à sélectionner des termes de la suite initiale et ce, en choisissant les indices sélectionnés de façon croissante.

Définition 2.59: *On appelle* extractrice *toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante.*

Exemple 2.60: Les fonctions suivantes sont des extractrices : $\varphi(n) = n$, $\varphi(n) = 2n$, $\varphi(n) = 2n+1$, $\varphi(n) = n^2$, $\varphi(n) = p_n$ (où p_n est le $n$ième entier premier), etc.

Définition 2.61: *Soit u une suite réelle. On appelle suite extraite de u (ou encore appelée* sous-suite de u*), toute suite du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une extractrice.*

Exemple 2.62: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors les suites suivantes sont des sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $u_0, u_2, u_4, u_6, \ldots, u_{2n}, \ldots$ est la suite extraite (u_{2n}) correspondant à l'extractrice $\varphi(n) = 2n$ (on prend un terme sur deux, ceux d'indices pairs),
2. $u_1, u_3, u_5, u_7, \ldots, u_{2n+1}, \ldots$ est la suite extraite (u_{2n+1}) correspondant à l'extractrice $\varphi(n) = 2n+1$ (on prend un terme sur deux, ceux d'indices impairs),
3. $u_0, u_1, u_4, u_9, u_{16}, \ldots, u_{n^2}, \ldots$ est la suite extraite (u_{n^2})correspondant à l'extractrice $\varphi(n) = n^2$ (on ne considère que les termes dont les indices sont des carrés parfaits),
4. $u_2, u_3, u_5, u_7, u_{11}, u_{13}, u_{17}, \ldots, u_{p_n}, \ldots$ est la suite extraite (u_{p_n}) correspondant à l'extractrice $\varphi(n) = p_n$ (on ne considère que les termes dont les indices sont des nombres premiers),
5. etc. (n'importe quelle fonction $n \mapsto \varphi(n)$ strictement croissante fournit une sous-suite).

Proposition 2.63: *Soit φ une extractrice. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.*

Démonstration. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Initialisation. Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a nécessairement $\varphi(0) \geqslant 0$.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. Mais par hypothèse de récurrence, $\varphi(n) \geqslant n$, donc $\varphi(n+1) > n$ i.e. $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Ceci conclut la récurrence. □

Proposition 2.64: *Si φ et ψ sont deux extractrices, alors la composée $\varphi \circ \psi$ est encore une extractrice.*

Démonstration. La composée de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante. □

Proposition 2.65: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est convergente, alors toutes les suites extraites de u convergent vers la même limite (celle de u).*

Démonstration. Supposons que u converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Soit φ une extractrice. Considérons la suite extraite v définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Or, pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$, d'après la Proposition 2.63. Donc en particulier, $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| = |v_n - \ell| < \varepsilon$. Donc $v = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Un corollaire de ce résultat est le résultat très utile suivant pour prouver qu'une suite ne converge pas.

Corollaire 2.66: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u admet deux sous suites convergeant vers des limites différentes, alors u n'est pas convergente.*

Démonstration. C'est la contraposée de la Proposition 2.65. Il n'y a donc rien à montrer.

Sinon on peut aussi raisonner par l'absurde. Supposons par l'absurde que u soit convergente. Alors d'après la Proposition 2.65 précédente, toutes les suites extraites de u convergent vers la même limite. Ceci contredit l'hypothèse du corollaire. Donc u est convergente.

□

Exemple 2.67: Ce résultat est extrêmement utile pour montrer qu'une suite ne converge pas. Par exemple, revenons à l'exemple $u_n = (-1)^n$. La suite extraite $u_{2n} = (-1)^{2n}$ est constante, égale à 1 donc converge vers 1. La suite extraite $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$ est constante, égale à -1 donc converge vers -1. Donc u ne converge pas.

Remarque 2.68: Que se passe-t-il quand on extrait une sous-suite d'une sous-suite ? Par définition, une sous-suite de u est du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $v_n = u_{\varphi(n)}$ et extrayons de nouveau une sous-suite de v : une telle sous-suite s'écrit donc $\left(v_{\psi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ pour une seconde extractrice ψ. Ainsi, une sous-suite d'une sous-suite de u s'écrit donc $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

En conclusion : prendre une première sous-suite (via l'extractrice φ) puis une sous-suite de la sous-suite (via l'extractrice ψ) revient à utiliser l'extractrice $\varphi \circ \psi$ (**Attention à l'ordre !**).

Définition 2.69: *Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de u si ℓ est la limite d'une sous-suite de u.*

Exemple 2.70:

1. Si u est une suite convergente, alors sa seule valeur d'adhérence est sa limite (c'est la Proposition 2.65 reformulée !).
2. Les valeurs d'adhérences $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont $+1$ et -1,
3. La suite définie par $(n(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune valeur d'adhérence.
4. La suite donnée par $(n(1+(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence, la valeur 0, mais ne converge pas car est non bornée.
5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $u = \left(e^{\frac{2i\pi n}{N}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Remarquons que u est une suite à valeurs complexes et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ (attention ici $|\cdot|$ représente le module et non la valeur absolue). Ainsi les éléments de la suite u appartiennent au *cercle unité*[2] parfois noté $\mathbb{U}$ ou $\mathbb{S}^1$. De plus la suite u est N-périodique. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+N} = e^{\frac{2i\pi(n+N)}{N}} = e^{\frac{2i\pi n}{N}} e^{\frac{2i\pi N}{N}} = e^{\frac{2i\pi n}{N}} \underbrace{e^{2i\pi}}_{=1} = u_n$. Ainsi l'image de la suite u, c'est-à-dire l'ensemble $u(\mathbb{N})$, n'est en fait composée que de N éléments distincts : $u(\mathbb{N}) = \{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$. Cet ensemble est appelée l'ensemble des racines N-ème de l'unité[3] puisque ce sont les N racines du polynôme $P = X^N - 1$.

   On a pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $u_k = e^{\frac{2i\pi k}{N}}$ est une valeur d'adhérence de la suite u. En effet posons pour $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ l'extractrice $\varphi_k : n \in \mathbb{N} \mapsto k + nN$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi_k(n)} = u_k$. Ainsi $(u_{\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante valant $u_k = e^{\frac{2i\pi k}{N}}$ donc convergente vers $u_k = e^{\frac{2i\pi k}{N}}$ qui est donc une valeur d'adhérence de la suite u.

2. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_unité`
3. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Racine_de_l%27unité`

6. L'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est l'intervalle $[-1, 1]$. Ce n'est pas évident à montrer ! Par contre il est facile de voir que si $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de u ou v, alors $\ell \in [-1, 1]$. Vérifions le par exemple pour u. Il existe φ extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant 1$, par le théorème des gendarmes (passage à la limite dans les inégalités) on obtient $-1 \leqslant \ell \leqslant 1$. C'est donc l'inclusion réciproque qui est difficile à prouver.

2.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Revenons à l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: cette suite est un exemple de suite bornée qui n'est pas convergente (voir Exemple 2.67). Par contre, cette suite admet au moins une sous-suite qui converge, par exemple la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, ou bien encore la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (mais en fait plein d'autres !). Ce résultat est en fait général, vrai pour toute suite bornée : il s'agit du théorème suivant, qui est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème 2.71 (Bolzano-Weierstrass (réel)): *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge.*

Mais avant de montrer le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous aurons besoin du résultat suivant qui formalise la question de l'existence d'extractrice sous certaines contraintes. Ce résultat est un outil important que nous réutiliserons à de nombreuses reprises en TD.

Proposition 2.72 (Existence d'extractrice sous contrainte): *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$. Alors il existe une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_n$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\text{il existe } \varphi : \{0, 1, \dots, n\} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante.}$$

Initialisation : comme I_0 est infini, il est non vide et il suffit de prendre $\varphi(0) \in I_0$.

Héridité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe $\varphi : \{0, 1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Comme I_{n+1} est infini, il existe $k \in I_{n+1}$ tel que $k > \varphi(n)$. On prolonge alors φ sur $\{0, 1, \dots, n+1\}$ avec $\varphi(n+1) = k$.

Ceci termine la récurrence. □

Corollaire 2.73: *Soit $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Il existe une extractrice φ telle que $\operatorname{Im}\varphi \subset I$.*

Démonstration. C'est un cas particulier de la Proposition 2.72 précédente avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = I$. □

Exemple 2.74: Pour montrer l'existence d'une sous-suite de u strictement positive, on cherche une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} > 0$. On réexprime cette contrainte sous la forme "$\varphi(n) \in I_n$" : on cherche φ telle que $\varphi(n) \in I = \{p \in \mathbb{N} \,/\, u_p > 0\}$. Si un tel ensemble est infini, c'est gagné grâce au Corollaire 2.73.

Exemple 2.75: Montrons que toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non majorée admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

> Méthode : pour construire une sous-suite qui tend vers $+\infty$, on cherche une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. On réexprime cette contrainte sous la forme "$\varphi(n) \in I_n$" : on cherche φ telle que $\varphi(n) \in I_n = \{p \in \mathbb{N} : u_p \geqslant n\}$ (ou au moins APCR).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_n = \{p \in \mathbb{N} : u_p \geqslant n\}$ est infini. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que I_n soit fini. Si I_n est vide, alors la suite est majorée par n. Sinon, I_n étant fini et non vide admet un majorant. Notons le N. Alors pour tout $p \geqslant N$, $u_p < n$. Autrement dit, la suite est majorée à partir d'un certain rang, donc majorée.

D'après la Proposition 2.72, il existe donc φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in I_n$ i.e. $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. Par passage à la limite dans l'inégalité, on déduit que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Preuve du Théorème 2.71 (Bolzano-Weierstrass). Soit u une suite réelle bornée. Il existe donc $a < b$ deux réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $J_0 = [a_0, b_0]$. Ainsi tous les éléments de la suite u sont contenus dans J_0.

On va construire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ une suite de sous intervalles $J_n = [a_n, b_n]$ de J_0 qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $J_n \subset J_{n-1}$ (i.e. $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'intervalle pour l'inclusion (ce sont des segments emboités)),
2. $J_n = [a_n, b_n]$ avec $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$,
3. J_n contient une infinité d'éléments de la suite, i.e. $I_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, u_k \in J_n\}$ est infini.

Initialisation : $n = 1$. On raisonne par dichotomie. Comme J_0 contient l'ensemble des éléments de la suite u, au moins l'un des deux intervalles $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ et $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite u. Si c'est le premier alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, sinon on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. Dans tous les cas, on a alors $J_1 = [a_1, b_1]$ qui vérifie $J_1 \subset J_0$, $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$ et par construction J_1 contient une infinité d'éléments de la suite u.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose construits $J_0, J_1, \ldots, J_n$ satisfaisant les propriétés 1., 2. et 3. On répète le même procédé que pour l'initialisation. On coupe en deux J_n et alors au moins l'un des deux intervalles $[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$ contient une infinité d'éléments de la suite u, car c'est le cas pour J_n. Si c'est le premier alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$, puis on définit $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Alors J_{n+1} satisfait les propriétés 1., 2. et 3. Ce qui termine la récurrence.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $I_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, u_k \in J_n\}$, on a par construction que I_n est infini. D'après la Proposition 2.72, il existe φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_n$ i.e. $u_{\varphi(n)} \in J_n$.

Or d'après la propriété 1. satisfaite par les J_n, $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par la propriété 2., on a $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et par conséquent convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$, puisque $u_{\varphi(n)} \in J_n$, par le théorème des gendarmes, on déduit que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. La suite u admet bien une sous suite qui converge. $\square$

Du théorème de Bolzano-Weierstrass énoncé pour les suites réelles, on peut en déduire le même résultat mais cette fois pour les suites complexes.

Théorème 2.76 (Bolzano-Weierstrass (complexe)): *Toute suite complexe bornée admet une sous-suite qui converge.*

Démonstration. Posons $v = \mathfrak{Re}(u)$ et $w = \mathfrak{Im}(u)$ les suites représentants la partie réelle et la partie imaginaire de u. Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z|$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que $|v_n| \leqslant M$ et $|w_n| \leqslant M$. Les suites réelles v et w sont bornées.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites réelles), il existe donc φ une extractrice telle que v_φ converge. Notons $\ell_1 \in \mathbb{R}$ sa limite. Puisque w est bornée, c'est également le cas de sa sous suite $t = w_\varphi$. Ainsi de nouveau, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (pour les suites réelles), il existe ψ extractrice telle que t_ψ converge. Notons ℓ_2 sa limite.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{\psi(n)} = w_{\varphi(\psi(n))} = w_{\varphi\circ\psi(n)}$. Enfin grâce à la Proposition 2.65 la suite extraite $v_{\varphi\circ\psi}$ de la suite v_φ converge vers ℓ_1 (puisque c'est le cas de v_φ). Ainsi la suite $u_{\varphi\circ\psi} = v_{\varphi\circ\psi} + iw_{\varphi\circ\psi}$ est convergente de limite $\ell_1 + i\ell_2 \in \mathbb{C}$. On a donc bien montré que u admet une sous suite qui converge. $\square$

Nous avons vu qu'une suite convergente est bornée et que la réciproque est fausse en toute généralité. Le résultat suivant donne une réciproque sous hypothèse supplémentaire d'unicité d'une valeur d'adhérence.

Proposition 2.77: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est bornée et admet une unique valeur d'adhérence, alors u est convergente.*

Démonstration. Voir TD. $\square$

2.5 Suites de Cauchy, complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

La dernière notion abordée dans ce chapitre est celle de suite de Cauchy. Intuitivement, la notion de suite de Cauchy dit la chose suivante : u est de Cauchy si les termes de la suite deviennent arbitrairement proches les uns des autres, quitte à attendre suffisamment longtemps.

Définition 2.78: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est de Cauchy si*

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } n_0 \geqslant 0 \text{ tel que pour tout } p, q \geqslant n_0,\ |u_p - u_q| < \varepsilon,$$

ou de manière équivalente

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } n_0 \geqslant 0 \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0, \text{ tout } p \geqslant 0,\ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Un exemple de suite de Cauchy est fourni par les suites convergentes.

Proposition 2.79: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est convergente, alors u est de Cauchy.*

Démonstration. Notons $\ell \in \mathbb{K}$ la limite de u.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $p, q \geqslant n_0$, alors par l'inégalité triangulaire $|u_p - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Nous venons donc bien de montrer que u est de Cauchy. $\square$

Il s'avère que dans le cas de suites réelles ou complexes, la réciproque est vraie. C'est l'objet du théorème fondamental d'analyse suivant.

Théorème 2.80: *Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si u est de Cauchy, alors u est convergente (dans $\mathbb{K}$).*

Remarque 2.81: Ce résultat est intéressant dans la mesure où il permet de montrer qu'une suite réelle converge, sans même avoir la moindre idée de sa limite !

Remarque 2.82: Les espaces métriques où les suites de Cauchy sont convergentes sont appelés *espaces complets*. Le résultat précédent dit donc que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complet. La notion d'espace complet sera étudiée en détail l'an prochain en L3.

Il faut noter qu'il y a des espaces qui ne sont pas complets : par exemple l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 10^{-n}E(10^n\sqrt{2})$ (i.e. la suite des approximations décimales $\sqrt{2}$) est une suite de rationnels et on peut vérifier qu'elle est de Cauchy. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$ en tant que suite réelle et on peut montrer que sa limite est $\sqrt{2}$. Cependant elle ne converge donc pas dans $\mathbb{Q}$, puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Il y a donc des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q}$ n'est pas un espace complet. Il y a des "trous". Quand on *complète* $\mathbb{Q}$, on construit $\mathbb{R}$ [4].

Pour prouver le Théorème 2.80, nous avons besoin de deux résultats intermédiaires.

Proposition 2.83: *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| < 1$. En particulier, pour tout $p \geqslant n_0$, $|u_p - u_{n_0}| < 1$ et donc $|u_p| \leqslant |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$. Par conséquent, u est bornée par $M := \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|\}$. $\square$

Proposition 2.84: *Toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite qui converge est convergente.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on suppose qu'elle est de Cauchy et qu'elle admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Montrons que toute la suite u converge vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de u_φ vers ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus comme u est de Cauchy, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_2$, $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors pour tout $n \geqslant n_0 = \max(n_1, n_2)$,

$$|u_n - \ell| = \left|u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - \ell\right| \underbrace{\leqslant}_{\text{ineg. trig.}} \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

4. https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_réels

car $n \geqslant n_2$ et $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_2$, et $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_1$ (on a utilisé la Proposition 2.63). Nous venons donc de prouver que u est convergente, de limite ℓ. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 2.80.

Démonstration du Théorème 2.80. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Par la Proposition 2.83 elle est donc bornée. Par Théorème de Bolzano-Weierstrass (version réelle : Théorème 2.71 ; ou complexe : Théorème 2.76 ; en fonction du contexte), elle admet une sous-suite convergente. Par la Proposition 2.84, toute la suite est elle-même convergente. $\square$

2.6 Synthèse : comment montrer qu'une suite converge (ou ne converge pas) ?

Résumons les outils que nous avons à notre disposition pour l'étude de la convergence d'une suite :

2.6.1 Comment montrer qu'une suite réelle u est convergente ?

Parmi les outils que nous avons vus dans ce chapitre, nous pouvons mentionner les méthodes suivantes :

1. si on a une idée préalable de la limite potentielle l de u, revenir à la Définition 2.18 et prouver à la main que la suite converge vers l,
2. par utilisation des opérations usuelles sur les limites (cf. § 2.2.4),
3. par encadrement, en utilisant le Théorème des gendarmes (Proposition 2.38),
4. si la suite est croissante (resp. décroissante), en montrant qu'elle est majorée (resp. minorée) (cf. Théorème 2.40),
5. en construisant une autre suite adjacente à u (cf. Proposition 2.48)
6. par calcul, en utilisant des développements limités de fonctions usuelles (cf. § 2.3),
7. en montrant que u est bornée, avec une unique valeur d'adhérence (cf. Proposition 2.77)
8. en montrant que u est de Cauchy (cf. Théorème 2.80).

Remarque 2.85: On notera que les items 4, 5, 7, 8 ne nécessitent pas de connaissance préalable de la limite : on prouve l'existence d'une limite sans la connaître !

2.6.2 Comment prouver qu'une suite n'est pas convergente ?

Parmi les méthodes possibles, nous avons à notre disposition :

1. en prenant la négation de la définition,
2. par encadrement (minoration par une suite qui tend vers $+\infty$ ou majoration par une suite qui tend vers $-\infty$) (cf. Proposition 2.35),
3. si u est croissante (resp. décroissante), en montrant qu'elle n'est pas majorée (resp. minorée), (cf. Théorème 2.40),
4. en exhibant deux sous-suites de u qui convergent vers des limites distinctes (cf. Proposition 2.66).

Chapitre 3

Fonctions réelles de la variable réelle, continuité

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f, ensemble de définition de f, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On définira en particulier rigoureusement les notions de limite et de continuité vues au lycée.

3.1 Limites d'une fonction réelle de la variable réelle

3.1.1 Notion de voisinage et d'adhérence, propriété locale

Définition 3.1 (Voisinage d'un point, de $\pm\infty$): *Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que V est voisinage de x s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$. Autrement dit, un voisinage de x contient non seulement x mais aussi un petit intervalle autour de x.*
2. *On dit que V est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $]M, +\infty[\subset V$ (resp. $]-\infty, M[\subset V$).*

Définition 3.2 (Point intérieur, intérieur): *Soit $A \subset \mathbb{R}$.*

1. *On dira que $x \in A$ est un* point intérieure *à A, si A est un voisinage de x. Ainsi $x \in A$ est un point intérieur à A si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.*
2. *On appelle* intérieur de A, *noté $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points intérieurs de A. On a par définition $\overset{\circ}{A} \subset A$.*

Exemple 3.3:

— Tout intervalle ouvert $]a, b[$ est voisinage de tous ses points. En effet, pour tout $x \in]a, b[$, prenons $\varepsilon = \min\left(\frac{b-x}{2}, \frac{x-a}{2}\right) > 0$. Mais alors $x - \varepsilon \geqslant x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} > a$ car $x > a$. De même, $x + \varepsilon \leqslant x + \frac{b-x}{2} = \frac{x+b}{2} < b$ car $x < b$. Ainsi $]a, b[$ contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et donc $]a, b[$ est un voisinage de x.

— Par contre, l'intervalle $]a, b]$ fermé en b n'est pas un voisinage de b car aucun intervalle de type $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ n'est contenu dans $]a, b]$ (ça dépasse à droite !).

Définition 3.4 (Ouvert): *On dira que* $A \subset \mathbb{R}$ *est un ouvert si* $A = \overset{\circ}{A}$*, i.e. si* A *est voisinage de chacun de ses points.*

Exemple 3.5: Pour $a < b$, $]a, b[$ est un ouvert mais pas $]a, b]$. La réunion $]0, 1[\cup]2, 3[$ est un autre exemple d'ouvert, ainsi que l'intervalle $]a, +\infty[$.

Définition 3.6 (Point adhérent, adhérence): *Soit* $A \subset \mathbb{R}$.

1. *On dira que* x *est adhérent à* A *si pour tout voisinage* V *de* x*, on a* $V \cap A \neq \emptyset$.
2. *On appelle adhérence de* A*, notée* $\bar{A}$*, l'ensemble de ses points adhérents. On a* $A \subset \bar{A}$.

Remarque 3.7: Comme tout voisinage V de x contient par définition un intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ pour une certain $\varepsilon > 0$, on peut réécrire la définition précédente comme ceci : on dit que x est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

D'après la définition, un point adhérent à un ensemble A est donc un point que l'on peut approcher de manière arbitrairement proche par des éléments de A.

Exemple 3.8:
- Tout élément x de A est adhérent à A (puisque $x \in A\cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ pour tout $\varepsilon > 0$). Par conséquent $A \subset \bar{A}$.
- Si A admet une borne supérieure (ou inférieure) alors $S = \sup(A) \in \bar{A}$. Voir TD.

Attention!

On a bien $A \subset \bar{A}$ mais la réciproque est fausse en général : 1 appartient à l'adhérence de $]0, 1[$ (c'est sa borne supérieure) mais $1 \notin]0, 1[$.

Définition 3.9 (Fermé): *On dira qu'un ensemble* $A \subset \mathbb{R}$ *est fermé si* $A = \bar{A}$.

Exemple 3.10: $[0, 1]$ est fermé, tout comme $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par contre $]0, 1]$ n'est pas fermé puisque 0 est adhérent à $]0, 1]$ sans y appartenir.

Définition 3.11 (Densité): *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *On dit que* A *est* dense *dans* $\mathbb{R}$ *si* $\bar{A} = \mathbb{R}$.

Remarque 3.12: Cette définition signifie la chose suivante : dire que A est dense dans $\mathbb{R}$ signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$ peut être approché de manière arbitrairement proche par des éléments de A.

Un résultat important de densité est le suivant.

Théorème 3.13: *L'ensemble des rationnels* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Admis. □

On aura besoin dans la suite de la notion de propriété vraie dans un voisinage d'un point ou de $\pm\infty$.

Définition 3.14 (Propriété vraie dans un voisinage): *Soit* $P(x)$ *une propriété (valant Vrai ou Faux) dépendant de* $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira que $P(x)$ est vraie au voisinage de x_0, s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $P(y)$ est vraie pour tout $y \in V$.

2. On dira que $P(x)$ est vraie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), s'il existe un voisinage V de $+\infty$ (resp. $-\infty$) tel que $P(y)$ est vraie pour tout $y \in V$.

Exemple 3.15: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage de x_0. On dira que

— f est localement bornée autour de x_0 s'il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tel que $|f(y)| \leqslant M$ pour tout $y \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

— f est localement non nulle (resp. positive, resp. strictement positive) autour de x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que $f(y) \neq 0$ (resp. $f(y) \geqslant 0$, resp. $f(y) > 0$) pour tout $y \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

3.1.2 Notion de limite et premières propriétés

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction d'ensemble de définition D_f non vide. On souhaite définir proprement la notion de limite de f en un point x_0 de D_f. Notons une différence avec la notion de limite concernant les suites vue au Chapitre 2 : prendre la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à ne considérer que la limite pour $n \to \infty$. Dans ce cas, la limite peut exister et être finie ($l \in \mathbb{R}$), infinie ($+\infty$ ou $-\infty$, suites divergentes du premier ordre) ou bien ne pas exister (suites divergentes du second ordre).

Dans le cas d'une fonction, la situation est plus diverse. On peut étudier la limite de f quand $x \to +\infty$, comme dans le cas des suites, mais on notera déjà que cela nécessite que D_f contienne $]M, +\infty[$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$. On peut de même étudier la limite de $f(x)$ pour $x \to -\infty$ (à condition que D_f contiennent $]-\infty, M[$ pour un certain $M \in \mathbb{R}$). Il est encore possible d'étudier la limite de $f(x)$ pour $x \to x_0$ avec $x_0 \in D_f$.

Regardons sur des exemples ces quelques cas génériques qu'il est possible de considérer. Notez que les exemples proposés ci-dessous mériteraient à chaque fois une démonstration. Vous pouvez vous y essayer en utilisant les définitions données ci-dessous.

Dans la suite on considère $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Une première situation est celle où on étudie la limite de $f(x)$ quand $x \to x_0 \in \bar{D}_f$: cela concerne par exemple le cas où $D_f =]a, b[$, (avec $x_0 \in \bar{D}_f = [a, b]$), ou bien $D_f =]a, +\infty[$ avec $x_0 \in \bar{D}_f = [a, +\infty[$ (resp. $D_f =]-\infty, a[$ avec $x_0 \in \bar{D}_f =]-\infty, a]$).

a) Dans ce cas, il se peut que f admette une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en x_0.

Exemple 3.16: La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet comme limite 9 en $x_0 = 3$.

Exemple 3.17: La fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet pour limite 0 en $x_0 = 0$.

b) Il se peut aussi que f admette une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) en x_0. Cette notion n'a de sens que pour $x_0 \in \bar{D}_f \setminus D_f$ (i.e. pour $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ si $D_f =]a, b[$ ou bien $x_0 = a$ si $D_f =]a, +\infty[$ ou $D_f =]-\infty, a[$).

Exemple 3.18: La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ au point $x_0 = \frac{\pi}{2}$ adhérent à l'ensemble $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

c) Il se peut enfin que f n'admette pas de limite en x_0 :

Exemple 3.19: La fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.

2. Un autre cas générique concerne l'étude d'une éventuelle limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$). Evidemment, cela nécessite que D_f soit un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

a) Cette limite peut exister et être finie :

Exemple 3.20: La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-x)$ admet pour limite 0 quand $x \to +\infty$.

b) Cette limite peut être infinie :

Exemple 3.21: La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

c) Cette limite peut ne pas exister :

Exemple 3.22: La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to +\infty$.

Les deux définitions qui suivent explicitent la notion de limite dans les différents cas génériques évoqués ci-dessus.

Définition 3.23 (Notion de limite pour $x \to x_0 \in \bar{D}_f$): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \bar{D}_f$.*

1. ***le cas d'une limite finie en un point de $\bar{D}_f$:*** *soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

2. ***le cas d'une limite infinie en un point de $\bar{D}_f \setminus D_f$:*** *soit $x_0 \in \bar{D}_f \setminus D_f$.*

a) On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall A > 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ f(x) > A. \tag{3.1.2}$$

b) On dit que f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall A > 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ f(x) < -A. \tag{3.1.3}$$

Définition 3.24 (Notion de limite pour $x \to \pm\infty$): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$.*

1. ***le cas d'une limite finie quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$:***

a) le cas $x \to +\infty$: on suppose que D_f est un voisinage de $+\infty$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

b) le cas $x \to -\infty$: on suppose que D_f est un voisinage de $-\infty$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in] - \infty, B[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.5}$$

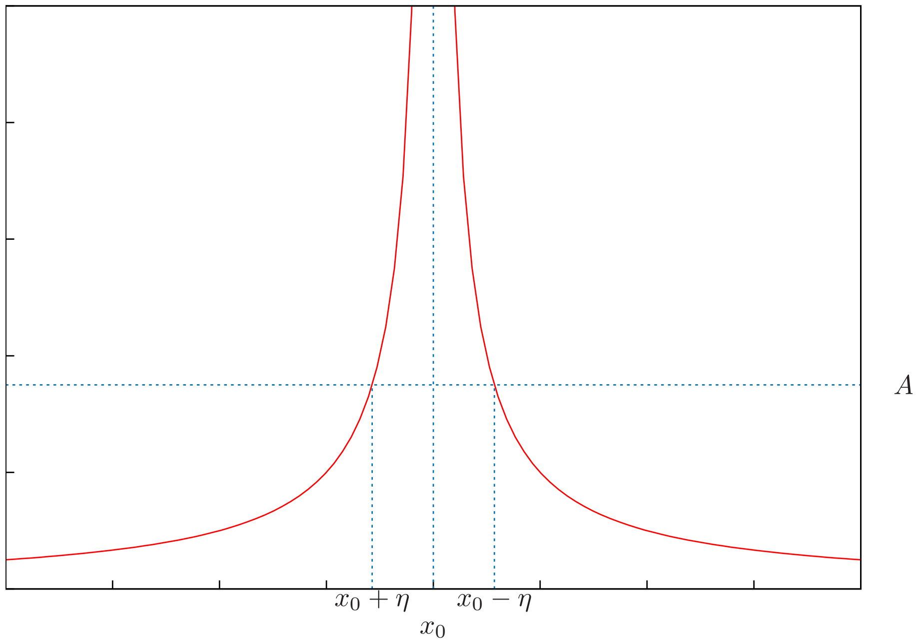


FIGURE 3.1 – Ici, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$: pour tout $A > 1$, il existe un petit intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (dont la taille dépend de ε et de x_0) sur lequel $f(x) > A$.

2. ***le cas d'une limite infinie quand*** $x \to +\infty$ ***:*** *on suppose que* D_f *est un voisinage de* $+\infty$.

a) On dit que f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si*

$$\forall A > 1,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ f(x) > A \tag{3.1.6}$$

b) On dit que f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *si*

$$\forall A > 1,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ f(x) < -A \tag{3.1.7}$$

3. ***le cas d'une limite infinie quand*** $x \to -\infty$ ***:*** *on suppose que* D_f *est un voisinage de* $-\infty$.

a) On dit que f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall A > 1,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, B[\cap D_f,\ f(x) > A \tag{3.1.8}$$

b) On dit que f *tend vers* $-\infty$ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall A > 1,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, B[\cap D_f,\ f(x) < -A. \tag{3.1.9}$$

Remarque 3.25: Les Définitions 3.23 et 3.24 quantifient précisément la notion intuitive selon laquelle $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ quand x est proche de x_0. Des exemples de convergence sont illustrés en Figures 3.1 et 3.2.

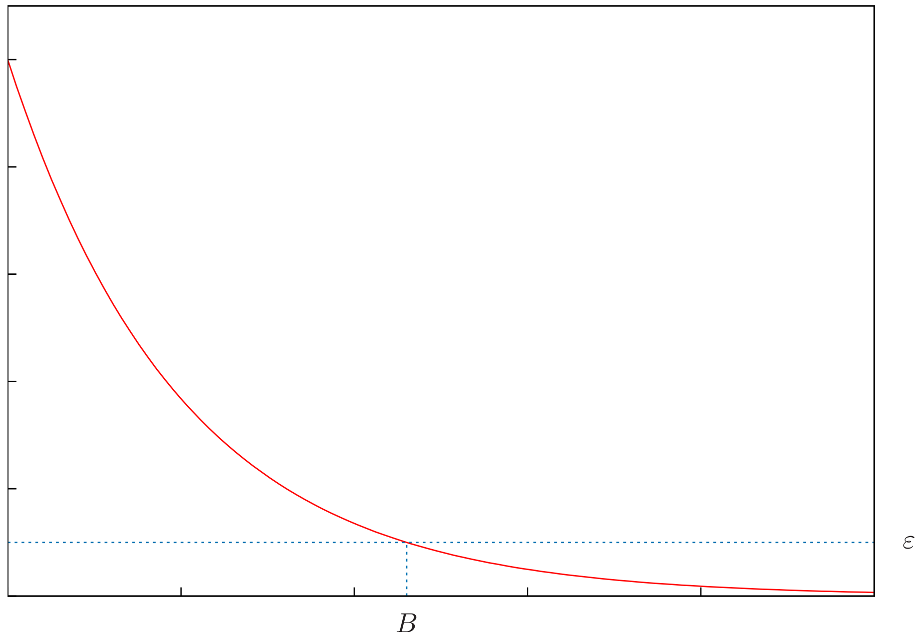


FIGURE 3.2 – Ici, $D_f = [M, +\infty[$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $B > 0$ (qui dépend de ε) tel que pour $x > B$, on a $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$.

Remarque 3.26: La liste précédente est longue mais on attire l'attention du lecteur sur le fait que des briques élémentaires se répètent parmi les différentes définitions, selon qu'on considère les cas $x \to x_0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ d'une part et une limite finie ou infinie d'autre part.

Exemple 3.27: Reprenons certains exemples évoqués au début de ce paragraphe :

— Exemple 3.16 : soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{8}, 1\right)$ et $x \in]3-\eta, 3+\eta[$. Alors $|x-3| < \eta$ et $|x| \leqslant |x-3|+3 \leqslant \eta+3 \leqslant 4$. On a $\left|x^2-9\right| = |x-3|\,|x+3| \leqslant \eta(|x|+3) \leqslant \frac{\varepsilon}{8}7 < \varepsilon$. Donc la limite de x^2 pour $x \to 3$ existe et vaut 9.

— Exemple 3.20 : soit $\varepsilon > 0$. Distinguons deux cas : si $\varepsilon \geqslant 1$, on pose dans ce cas $A = 1 > 0$ (par exemple). Alors pour tout $x > 1$, $x > 0$ et donc $|\exp(-x) - 0| = \exp(-x) < 1 \leqslant \varepsilon$. Si maintenant $\varepsilon < 1$, on pose $A = -\ln(\varepsilon) > 0$. Alors, pour $x > A$ on a $|\exp(-x) - 0| = \exp(-x) < \varepsilon$. Ainsi $\exp(-x)$ tend vers 0 quand $x \to \infty$.

  Remarquons en particulier que le premier cas ($\varepsilon \geqslant 1$) est un cas (nécessaire à traiter mais) inintéressant : si ε est grand, la proximité (à ε près) de $\exp(-x)$ à 0 est triviale. La définition de la convergence vers une limite est significative uniquement dans le cas où ε est arbitrairement petit.

— Exemple 3.21 : soit $A > 0$ arbitraire. Posons $B = \sqrt{A}$. Alors pour tout $x > B$, $x^2 > B^2 = A$. Donc x^2 tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Lorsque l'on sait qu'une fonction admet une limite en un point ou en $\pm\infty$, on peut en déduire certaines propriétés locales pour la fonction. La proposition suivante en énonce quelques unes dans le cas où la limite est finie.

Proposition 3.28 (Limite finie et propriétés locales): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{D}_f$ (ou $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ si D_f contient un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. Si f tend vers ℓ en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0 dans D_f : il existe $M > 0$ et un voisinage de V de x_0 tels que pour tout $x \in V \cap D_f$, $|f(x)| \leqslant M$.

2. Si de plus, $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), alors f est strictement positive (resp. strictement négative) dans un voisinage de x_0 dans D_f : il existe V voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D_f$, $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$). En particulier, f ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 dans D_f.

Démonstration. On ne traite ici que le cas x_0 réel et le premier point. Le reste est laissé à titre d'exercice.

Comme $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - \ell| < 1$. Mais alors, $|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$. Posons $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, qui est un voisinage de x_0, on a bien montré qu'il existe $M = |\ell| + 1$ tel que pour tout $x \in V \cap D_f$, $|f(x)| \leqslant M$. La fonction f est bien localement bornée en x_0. □

Remarque 3.29:
- Notez bien l'importance dans l'énoncé de la Proposition 3.28 de considérer les $x \in V \cap D_f$ et non $x \in V$, car on ne sait pas a priori si $V \subset D_f$.
- La liste des propriétés énoncée n'est pas exhaustive.
- Lorsque f admet $+\infty$ comme limite, on peut montrer par exemple que f est également strictement positive dans un voisinage de x_0 dans D_f.

Proposition 3.30 (Composées de limites): *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que $f(D_f) \subset D_g$. Soit $x_0 \in \bar{D}_f$, ou $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ mais alors D_f est un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$,

2. $g(y) \xrightarrow[y \to l]{} l'$,

alors

$$g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} l'. \tag{3.1.10}$$

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où l, l', x_0 sont des réels, les autres cas sont laissés à titre d'exercice. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y) \xrightarrow[y \to l]{} l'$, on a

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall y \in]l - \eta_1, l + \eta_1[\cap D_g,\ \left| g(y) - l' \right| < \varepsilon. \tag{3.1.11}$$

Appliquons maintenant la définition de la convergence $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ pour la donnée de ce $\eta_1 > 0$: il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\cap D_f$, on a $|f(x) - l| < \eta_1$. Ainsi, pour de tels x, $f(x) \in]l - \eta_1, l + \eta_1[\cap D_g$ (car $f(D_f) \subset D_g$) et donc en appliquant (3.1.11) pour $y = f(x)$, on obtient que $|g(f(x)) - l'| < \varepsilon$. On a bien prouvé que $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} l'$. □

Définition 3.31 (Notion de limite à droite et de limite à gauche en un point): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{D}_f$. On suppose que pour tout $\eta > 0$, on a*

$$]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f \neq \varnothing,$$

quand on évoque une limite à gauche et

$$]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f \neq \varnothing,$$

quand on évoque une limite à droite.

1. *a) On dit que f a pour limite à gauche $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.12}$$

On note également parfois la limite finie à gauche de f en x_0 grâce à la notation $f(x_0^-)$.

b) On dit que f a pour limite $+\infty$ à gauche en x_0, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ f(x) > A. \tag{3.1.13}$$

c) On dit que f a pour limite $-\infty$ à gauche en x_0, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ f(x) < -A. \tag{3.1.14}$$

2. *a) On dit que f a pour limite à droite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{3.1.15}$$

On note également parfois cette limite finie à droite de f en x_0 grâce à la notation $f(x_0^-)$.

b) On dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en x_0, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$, si

$$\forall A > 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ f(x) > A. \tag{3.1.16}$$

c) On dit que f a pour limite $-\infty$ à droite en x_0, et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$, si

$$\forall A > 1,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ f(x) < -A. \tag{3.1.17}$$

Attention!

$f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ sont uniquement des notations pour représenter les limites finies de f en x_0, pas les valeurs de la fonction f prises en $x_0^\pm$: x_0^- et x_0^+ ne représentent pas des nombres réels !

On réserve ces notations seulement quand les limites à gauche et à droite sont finies. Par conséquent dire que $f(x_0^-)$ existe, c'est dire que f admet une limite à gauche en x_0 et que celle-ci est finie.

Exemple 3.32: — La fonction E *partie entière* admet une limite à gauche en 1 qui vaut 0 et une limite à droite en 1 qui vaut 1.

— La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une limite à gauche en 0 qui vaut $-\infty$ et une limite à droite en 0 qui vaut $+\infty$.

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite et conséquences

Proposition 3.33 (Caractérisation séquentielle de la limite): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, et $x_0 \in \bar{D}_f$ (ou $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ et dans ce cas D_f est un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$). Alors on a l'équivalence entre*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,

2. pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{\text{de } D_f}$ qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration. On traite uniquement le cas où x_0 est un réel et la limite l est finie. On laisse les autres cas (analogues) à titre d'exercice.

Traitons d'abord l'implication directe : supposons que f admette l pour limite quand $x \to x_0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de D_f qui tend vers x_0. Montrons que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$,

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.18}$$

Pour ce $\eta > 0$, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0,

$$\exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f. \tag{3.1.19}$$

Mettant bout-à-bout (3.1.18) et (3.1.19), nous obtenons que pour $n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - l| < \varepsilon$. Nous venons de montrer que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite l.

Prouvons maintenant la réciproque. Pour cela, supposons par l'absurde que f ne tend pas vers ℓ en x_0.

Ainsi il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$ tel que $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors en posant $\eta_n = \frac{1}{n+1} > 0$, il existe donc $u_n \in]x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1}[\cap D_f$ tel que $|f(u_n) - l| \geqslant \varepsilon_0$. Mais alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 (par application du théorème des gendarmes) et donc par hypothèse, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Ceci entre en contradiction avec le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon_0.$$

D'où on a bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. □

Remarque 3.34: La Proposition 3.33 est particulièrement utile car elle permet de prouver l'existence de limites sans se ramener à des ε et des η ; on peut utiliser toute la machinerie sur les suites vue dans le Chapitre 2.

Par ailleurs, ce résultat est particulièrement utile pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en $x \to x_0$: il suffit pour cela d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers x_0 mais telles que les suites images $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes.

Revenons à l'Exemple 3.19 : posons pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Les suites u et v ainsi définies tendent vers 0. Par contre, $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ alors que $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ pour $n \geqslant 1$. Ainsi $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Le même argument fonctionne pour l'Exemple 3.22 (prendre $w_n = \pi n$ et $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$).

La Proposition 3.33 permet aussi de transposer sans preuve supplémentaire des résultats connus du Chapitre 2 à propos des suites en des résultats similaires sur les fonctions.

Dans ce qui suit, f, g et h sont des fonctions réelles de la variable réelle, $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Bien sûr, on supposera implicitement si nécessaire que les ensembles de définitions de ces fonctions sont d'intersection non vide et que les limites s'entendent selon le domaine de définition commun. Dans ce contexte, les résultats suivants sont vrais :

1. si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ pour $l \in \mathbb{R}$, alors l est unique (voir Proposition 2.21),
2. si f est bornée au voisinage de x_0 et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ (voir Proposition 2.30). Cette propriété prouve en particulier la convergence de l'exemple 3.17.
3. si f est minorée au voisinage de x_0 et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$, alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ (voir Proposition 2.32),
4. les opérations sur les limites de fonctions sont identiques à celles sur les suites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient). En particulier, les règles de calcul énoncées en Figures 2.2 et 2.3 dans le contexte des suites restent valables dans le contexte des fonctions (par ex : si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l' \in \mathbb{R}$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l + l' \in \mathbb{R}$).
5. passage à la limite dans une inégalité : si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l' \in \mathbb{R}$ et si pour tout x sur un voisinage de x_0 on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $l \leqslant l'$ (voir Proposition 2.34).
6. Théorème des gendarmes : si pour tout x dans un voisinage de x_0, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l' \in \mathbb{R}$ avec $l = l'$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ (voir Proposition 2.38).
7. Théorème des gendarmes bis : si pour tout x dans un voisinage de x_0, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ (voir Proposition 2.35).

Remarque 3.35: Notez bien sûr que l'on pourrait prouver chacune des propriétés précédentes directement à partir de la Definition 3.23 sans passer par la Proposition 3.33.

3.2 Notations de Landau, négligeabilité, équivalence

Définition 3.36: *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $x_0 \in \bar{D}_f \cap \bar{D}_g$ (ou $x_0 \in \{\pm\infty\}$ et dans ce cas D_f et D_g sont des voisinages de $\pm\infty$).*

1. *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varepsilon : V \cap D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 telle que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \in V \cap D_f \cap D_g$. On note alors*

$$f(x) = o_{x\to x_0}(g(x)). \tag{3.2.1}$$

2. *On dit que f est équivalent à g en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\delta : V \cap D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ de limite 1 en x_0 telle que $f(x) = \delta(x)g(x)$ pour tout $x \in V \cap D_f \cap D_g$. On note alors*

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x). \tag{3.2.2}$$

Remarque 3.37: Lorsque g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, on a

$$f(x) = o_{x\to x_0}(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ et } f(x) \sim_{x\to x_0} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{3.2.3}$$

En particulier,

$$f(x) = o_{x\to x_0}(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \text{ et } f(x) \sim_{x\to x_0} l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l, \text{si } l \neq 0. \tag{3.2.4}$$

On dispose du critère séquentiel suivant.

Proposition 3.38: *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $x_0 \in \bar{D}_f \cap \bar{D}_g$ (ou $x_0 \in \{\pm\infty\}$ et dans ce cas D_f et D_g sont des voisinages de $\pm\infty$). On a l'équivalence entre*

1. *$f(x) = o_{x\to x_0}(g(x))$,*
2. *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D_f \cap D_g$ qui tend vers x_0, $f(u_n) = o_{n\to\infty}(g(u_n))$,*

ainsi que

1. *$f(x) \sim_{x\to x_0} g(x)$,*
2. *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D_f \cap D_g$ qui tend vers x_0, $f(u_n) \sim_{n\to\infty} g(u_n)$.*

De cette caractérisation séquentielle se déduisent les propriétés similaires de manipulation des équivalents vues pour les suites.

Exemple 3.39: Négligeabilités et équivalences classiques : pour tout $0 < \alpha < \beta$ et $a > 0$

$$\ln(x) =_{x\to\infty} o(x^\alpha), \; x^\alpha =_{x\to\infty} o(x^\beta), \text{ et } x^\alpha =_{x\to\infty} o\left(e^{\beta x}\right), \tag{3.2.5}$$

$$\ln(x) =_{x\to 0} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \; x^\beta =_{x\to 0} o(x^\alpha), \tag{3.2.6}$$

ainsi que, pour $\alpha > 0$

$$\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x, \; e^x - 1 \sim_{x\to 0} x, \; (1+x)^\alpha \sim_{x\to 0} 1 + \alpha x, \; \sin(x) \sim_{x\to 0} x, \text{ et } 1 - \cos(x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}. \tag{3.2.7}$$

3.3 Continuité

3.3.1 Continuité en un point

Définition 3.40: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.*

On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite en x_0. Dans le cas contraire, on dira que f est discontinue au point x_0.

Dans la définition de la continuité, il n'est pas nécessaire de préciser que la limite est finie, ni même qu'elle vaut $f(x_0)$. En effet, comme le montre la proposition suivante, c'est une conséquence de la définition de la limite et du fait que $x_0 \in D_f$.

Proposition 3.41: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.*

Si f est continue en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Démonstration. Si f est continue en x_0, alors d'après la Définition 3.40, f admet une limite en x_0. Notons ℓ cette limite qui peut donc être un réel mais également $\pm\infty$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite (Proposition 3.33), comme la suite u constante valant x_0 est une suite de D_f, car $x_0 \in D_f$, qui converge vers x_0, on a nécessairement que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(x_0)$. D'où par unicité de la limite $\ell = f(x_0)$.

□

On peut donc donner la définition suivante alternative de la continuité.

Proposition 3.42: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.*

On a f continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

On a donc également, f continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

La proposition suivante est fondamentale car elle donne une caractérisation de la continuité en un point via des suites. C'est un résultat qui est très souvent utilisé en pratique.

Proposition 3.43 (Caractérisation séquentielle de la continuité): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.*

On a f est continue en x_0 si et seulement si pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui converge vers x_0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration. On a f continue en x_0 si et seulement si f admet $f(x_0)$ comme limite en x_0. Or d'après la caractérisation séquentielle de la limite (Proposition 3.33), ceci est équivalent à dire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui converge vers x_0, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$. Ce qui est exactement ce que l'on voulait démontrer. □

Le résultat suivant donne un critère de continuité en un point via les limites à gauche et à droite.

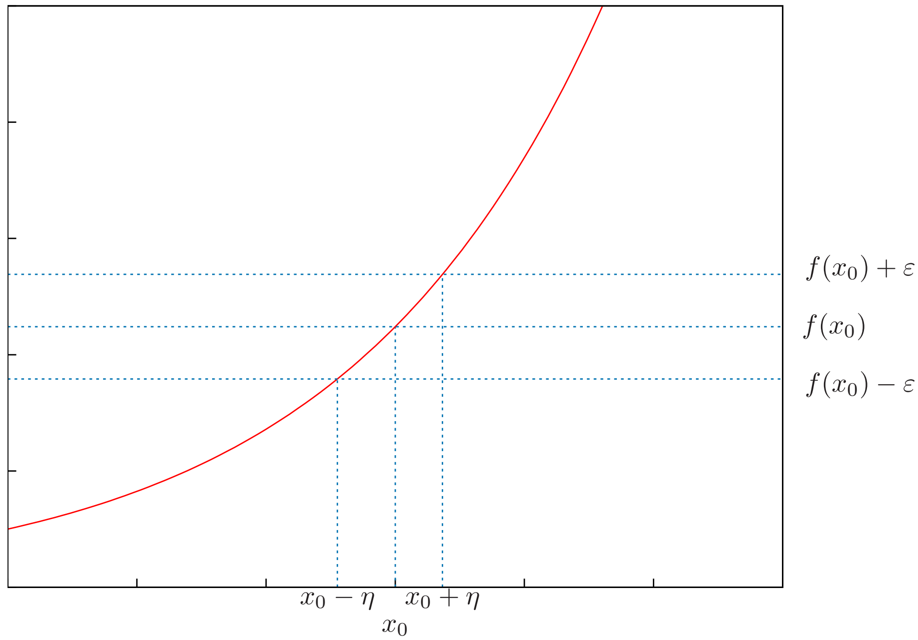


FIGURE 3.3 – La fonction f est continue en x_0 : pour tout intervalle $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$ de longueur arbitraire autour de $f(x_0)$, il existe un petit intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ (dont la taille dépend de ε et de x_0) sur lequel f prend toutes ses valeurs dans $]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$.

Proposition 3.44 (Continuité et limites à droite et à gauche): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. On suppose que pour tout $\eta > 0$ on a $]x_0-\eta, x_0[\cap D_f \neq \varnothing$ et $]x_0, x_0+\eta[\cap D_f \neq \varnothing$.*

Alors f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et sont égales à $f(x_0)$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si f continue en x_0 alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap D_f$, on a $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. En particulier on a pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0[\cap D_f$ (qui est non vide par hypothèse) $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ i.e. f admet une limite finie à gauche en x_0 valant $f(x_0)$: $f(x_0^-)$ existe et $f(x_0^-) = f(x_0)$. De même pour tout $x \in]x_0, x_0+\eta[\cap D_f$ (qui est non vide par hypothèse) $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ i.e. f admet une limite finie à droite en x_0 valant $f(x_0)$: $f(x_0^+)$ existe et $f(x_0^+) = f(x_0)$. On a donc bien $f(x_0^+) = f(x_0^-)$.

($\Leftarrow$) Si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et sont égales à $f(x_0)$, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0[\cap D_f$, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ et de plus il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0, x_0+\eta'[\cap D_f$, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. En posant $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$, on a donc pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap D_f$, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ (cette inégalité est bien encore vraie lorsque $x = x_0$). D'où f est continue en x_0. $\square$

Remarque 3.45: La condition

$$\text{pour tout } \eta > 0 \text{ on a }]x_0-\eta, x_0[\cap D_f \neq \varnothing \text{ et }]x_0, x_0+\eta[\cap D_f \neq \varnothing,$$

dans la proposition précédente, peut tout simplement se réécrire de manière équivalente $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f$.

Il est possible d'étendre une fonction par continuité. Ceci est précisé dans la définition-proposition suivante.

Proposition 3.46 (Prolongement par continuité): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{D_f} \setminus D_f$. On dira que f est prolongeable par continuité si f admet une limite finie en x_0.*

Notons $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite. Alors en posant

$$\forall x \in D_f \cup \{x_0\}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \ell, & x = x_0, \end{cases}$$

on définit une fonction $\tilde{f} : D_f \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ qui étend la fonction f, on l'appelle prolongement par continuité de f en x_0. De plus $\tilde{f}$ continue en x_0.

Démonstration. On a juste à démontrer que $\tilde{f}$ est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \tilde{f}(x_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$. Comme $x_0 \notin D_f$, on a donc par définition de f que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $f(x) = \tilde{f}(x)$, et donc $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$. Cette dernière égalité est encore vraie quand $x = x_0$, d'où on a

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \underbrace{(D_f \cup \{x_0\})}_{= D_{\tilde{f}}}, \quad |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon.$$

On a donc bien montré que $\tilde{f}$ est continue en x_0. □

Remarque 3.47: Souvent, par abus de notation, on se permet d'identifier f avec son prolongement $\tilde{f}$.

On en déduit alors le résultat particulier suivant de prolongement par continuité utilisant en plus la notion de limite à gauche et limite à droite.

Proposition 3.48 (Prolongement par continuité - un cas particulier): *Soit $a < c < b$ trois réels. Si f est une fonction définie sur $]a, b[\setminus \{c\}$ telle que $f(c^-)$ et $f(c^+)$ existent et sont égales, alors la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in]a, b[\setminus \{c\}$ et $\tilde{f}(c) = f(c^-) = f(c^+)$ est le prolongement par continuité de f en c. La fonction $\tilde{f} :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue en c.*

Démonstration. Voir TD. □

Exemple 3.49: La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0, en définissant $f(0) = 0$. C'est la conséquence de l'Exemple 3.17.

Remarque 3.50: Il existe plusieurs sortes de discontinuités en un point $x_0 \in D_f$ pour une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$:

— le cas où $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent, sont égales mais pas à $f(x_0)$. On pensera par exemple à la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(0) = 1$.

— $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent, mais sont différentes. C'est le cas de la fonction partie entière en tout $k \in \mathbb{Z}$ par exemple.

— $f(x_0^-)$ ou $f(x_0^+)$ n'existent pas. C'est le cas de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$ par exemple. En effet f n'a ni une limite finie à droite, ni limite finie à gauche en 0.

Définition 3.51: *On dira enfin que f est continue sur D_f si elle est continue en chacun des points de D_f. Soit I un intervalle. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.*

Remarque 3.52: On rappelle sans démonstration les résultats usuels : les somme, produit, quotient, composée de fonctions continues sont continues. De même, les fonctions classiques sont continues sur leur ensemble de définition (polynômes, logarithmes, exponentielles, fonctions trigonométriques et hyperboliques, réciproques de ces fonctions, etc.).

3.3.2 Continuité sur un intervalle, Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 3.53 (Théorème des Valeurs Intermédiaires): *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.*

Démonstration. On suppose, quitte à remplacer f par $-f$, que $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $y \in [f(a), f(b)]$.

Supposons d'abord que $y \in \{f(a), f(b)\}$, alors y admet bien un antécédent dans $[a, b]$ ($x = a$ ou $x = b$).

Supposons donc $y \notin \{f(a), f(b)\}$. Alors $f(a) < f(b)$ car sinon $f(a) = f(b)$ et comme $y \in [f(a), f(b)] = \{f(a)\}$, on obtient $y = f(a)(= f(b))$. On a donc

$$f(a) < y < f(b).$$

Soit l'ensemble

$$E := \{t \in [a, b] \,/\, f(t) \leqslant y\}\,. \tag{3.3.1}$$

L'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est non vide car $f(a) < y$ et donc $a \in E$. De plus E est majoré par b car c'est un sous-ensemble de $[a, b]$. Par propriété de la borne supérieure, E admet une borne supérieure, notée x. On a forcément $x \in [a, b]$, car $a \in E$ et x majorant de E donc $a \leqslant x$ et b majorant de E et x plus petit majorant de E donc $x \leqslant b$.
Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x. Comme f est continue en $x \in [a, b]$, par le critère séquentielle de la continuité (Proposition 3.43), $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. Par définition de E, on a $f(t_n) \leqslant y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc par passage à la limite dans l'inégalité il vient $f(x) \leqslant y$. Notons alors que nécessairement $x < b$ car sinon si $x = b$ alors $f(x) = f(b) > y \geqslant f(x)$, ce qui est absurde.
Montrons l'autre inégalité $f(x) \geqslant y$. Supposons par l'absurde que $f(x) < y$.
Soit $\varepsilon = y - f(x) > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]x - \eta_0, x + \eta_0[\cap D_f$, $f(t) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Comme $x < b$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $x + \eta_1 < b$ (par exemple prendre $\eta_1 = \frac{b-x}{2} > 0$). Posons $\eta = \min(\eta_0, \eta_1) > 0$. On a alors $]x, x + \eta[\subset [a, b]$ et pour tout $t \in]x, x + \eta[$, $f(t) < f(x) + \varepsilon = f(y)$ [1]. On vient donc de

1. Notez que l'on aurait pu choisir ε plus petit que $y - f(x)$, par exemple $\frac{y-f(x)}{2}$, cela aurait aussi fonctionné.

montrer que $]x, x + \eta[\subset E$. Or comme x est un majorant de E, on a devrait avoir pour tout $t \in]x, x + \eta[$, $t \leqslant x$, ce qui est absurde. D'où $f(x) \geqslant y$.
On obtient finalement que $f(x) = y$, i.e. y admet un antécédent dans $[a, b]$. □

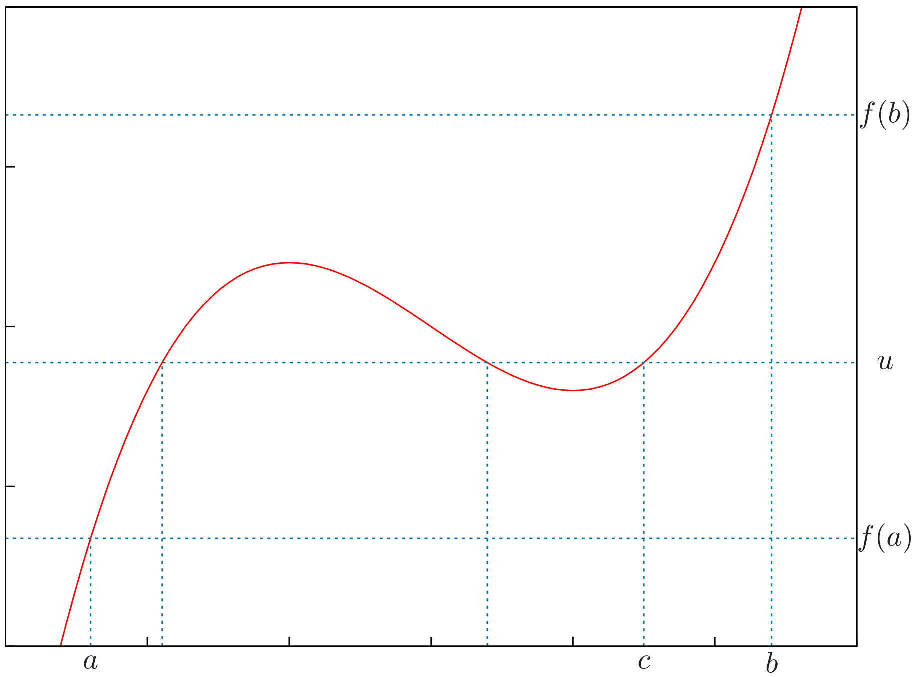


FIGURE 3.4 – Pour un $u \in [f(a), f(b)]$ donné, on voit nécessaire que f admet un antécédent puisqu'elle est continue. Il peut exister plusieurs $c \in]a, b[$ tels que $f(c) = u$. Parmi eux, le c que l'on cherche dans la démonstration du Théorème 3.53 est celui le plus à droite possible.

Théorème 3.54 (TVI - formulation alternative): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $I \subset D_f$ où I est supposé être un intervalle. Si f est continue sur I, alors $f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}$ est un intervalle.*

On dit que l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 3.53. Voir TD. □

Exemple 3.55: Tout polynôme de degré impair P a au moins une racine réelle. En effet, $x \mapsto P(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est positif) ou tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est négatif). Dans tous les cas, P prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. P étant continu, P s'annule nécessairement en au moins un point, par théorème des valeurs intermédiaires.

Une conséquence importante du Théorème des Valeurs Intermédiaires est le résultat suivant.

Théorème 3.56 (Théorème de la bijection): *Soit I un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est strictement monotone si et seulement si f est injective.*

Si l'une de ces deux conditions équivalentes est satisfaite alors $f : I \to f(I)$ est une bijection et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est nécessairement continue. On dit alors que f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Démonstration. Admis. Voir TD pour la première équivalence. □

Remarque 3.57: Une fonction strictement monotone est automatiquement injective et donc bijective sur son image. La fonction réciproque est ainsi bien définie. Cependant une fonction injective n'est pas nécessairement strictement monotone. Mais la réciproque est vraie quand la fonction est continue. Voir TD.

Remarque 3.58: Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par la symétrie d'axe la première bissectrice $y = x$.

Exemple 3.59:

— La fonction sin est une fonction continue strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Par conséquent, d'après le théorème 3.56, c'est un homéomorphisme : sa fonction réciproque, notée $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Voir Figure 3.5), est continue.

— La fonction cos est un homéomorphisme strictement décroissant de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est notée $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (Voir Figure 3.6).

— La fonction tan est un homéomorphisme strictement croissant de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (Voir Figure 3.7).

Attention!

Une erreur grossière (malheureusement) souvent vue dans les copies : certes, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, mais la fonction arctan n'est surtout pas égale à $\frac{\arcsin}{\arccos}$!

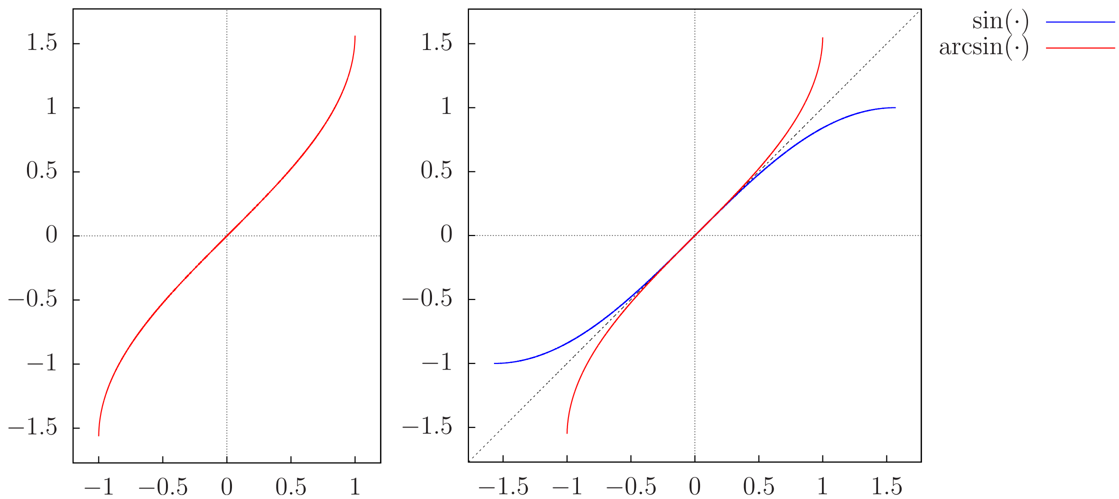
3.3.3 Continuité sur un segment

Un autre résultat fondamental concernant les fonctions continues est le suivant.

Théorème 3.60: *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$.*

Démonstration. On va montrer uniquement qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant M$ et qu'il existe $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = M$. Pour m, la preuve est similaire et laissée à titre d'entraînement / exercice.

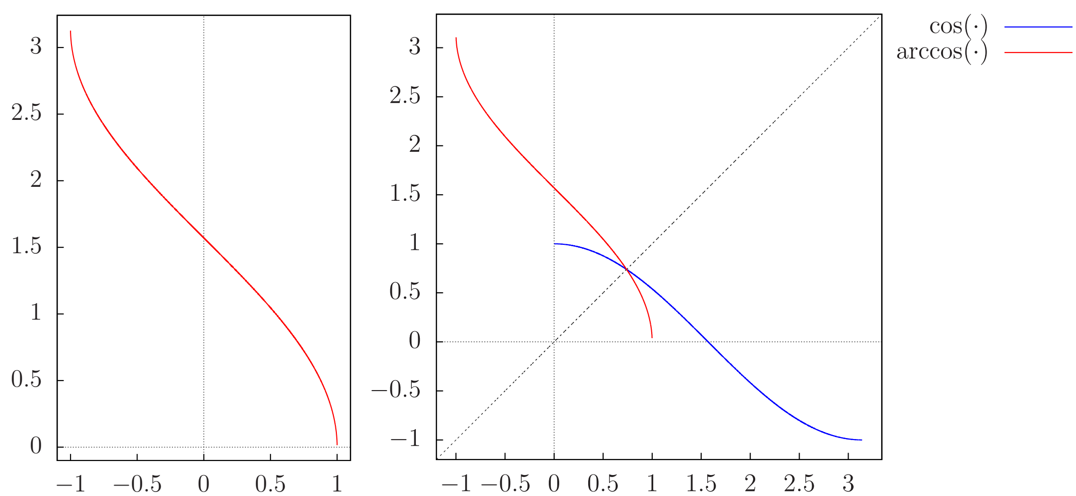
Si f n'est pas majorée, alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$ telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Mais comme, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (incluse dans $[a, b]$), par le théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 2.71), il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. La fonction f étant continue, par le critère séquentielle de la continuité (Proposition 3.43),



(a) Fonction arcsin

(b) Le graphe de la fonction arcsin se déduit de celui de la restriction de la fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.5 – Fonctions sin et arcsin.



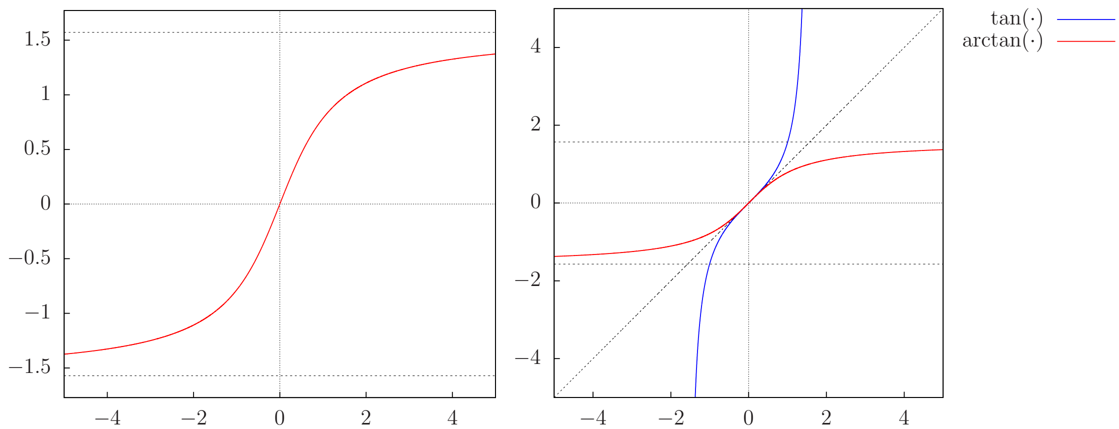
(a) Fonction arccos

(b) Le graphe de la fonction arccos se déduit de celui de la restriction de la fonction cos sur $[0, \pi]$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.6 – Fonctions cos et arccos.

$\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également. Ceci est contradictoire avec le fait que $(f(x_n))_{n\to+\infty}$ tend vers $+\infty$. D'où f est majorée.

Posons $A = \{f(x) \,/\, x \in [a,b]\}$. C'est un ensemble non vide et majorée (comme f majorée), par la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure. Notons $M = \sup(A)$. Comme M est un majorant de A, on a pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant M$. Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de



(a) Fonction arctan

(b) Le graphe de la fonction arctan se déduit de celui de la restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.7 – Fonctions tan et arctan.

$[a, b]$ telle que $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M. Or $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge, par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ et φ une extractrice telle que $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers d. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant t_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient $d \in [a, b]$. Or f est continue en $d \in [a, b]$, donc par le critère séquentielle de la continuité, on déduit que $(f(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(d)$. Enfin comme $f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, c'est aussi le cas de sa sous-suite $(f(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on obtient donc $f(d) = M$. □

Théorème 3.61 (Image continue d'un segment): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset D_f$, avec $a \leqslant b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ est un segment.*

On dit que l'image par une fonction continue d'un segment est un segment.

Démonstration. D'après le théorème 3.60, $c, d \in [a, b]$ tels que $f([a, b]) \subset [f(c), f(d)]$. Montrons l'autre inclusion.

Soit $y \in [f(c), f(d)]$. Comme f est continue sur $[a, b]$ donc sur $[c, d] \subset [a, b]$ (ou $[d, c]$ en fonction de si $c \leqslant d$ ou $d \leqslant c$), il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires, $x \in [c, d] \subset [a, b]$ (ou $[d, c]$) tel que $f(x) = y$. D'où $y \in f([a, b])$. Ainsi $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$. □

Attention!

Le Théorème 3.60 n'est plus vrai sur un intervalle qui n'est pas un segment. Par exemple la fonction tan n'est pas bornée sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.4 Continuité uniforme

Motivons le paragraphe qui vient : si $f : D_f \to \mathbb{R}$, écrivons le fait que f est continue en tout point $x_1 \in D_f$: cela correspond à écrire que, pour tout $x_1 \in D_f$, la limite de $f(x)$ quand $x \to x_1$ est $f(x_1)$, c'est-à-dire :

$$\forall x_1 \in D_f,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[\cap D_f,\ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Nous avons noté ici η_1 pour insister sur le fait que le $\eta > 0$ qui convient dans (3.4.1) dépend a priori du point $x_1 \in D_f$ que l'on considère.

Le point sur lequel nous voulons insister dans ce paragraphe est le suivant : si maintenant on considère un point x_2 différent de x_1 et qu'on étudie la continuité de f en ce point, il n'y a aucune raison a priori que le η_1 qui convient pour x_1 soit le même que le η_2 qui convient pour x_2.

Prenons un exemple pour illustrer ce phénomène : soit la fonction dont le graphe est tracé en Figure 3.8. Essayons de quantifier la continuité de f aux points x_1 et x_2. Considérons pour cela deux intervalles centrés autour de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ de longueur identique 2ε et quantifions pour chaque point x_1 et x_2 le $\eta_i > 0$ maximal pour lequel la relation (3.4.1) est vérifiée.

Sur un voisinage de x_1, la fonction f est plus ou moins constante. Ainsi, la contrainte $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ est vérifiée pour x dans un intervalle $]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[$ relativement grand. A l'inverse, la fonction a une pente importante au voisinage de x_2 : la contrainte $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$ est vérifiée sur un intervalle $]x_2 - \eta_2, x_2 + \eta_2[$ visiblement plus petit.

Autrement dit, le $\eta_1 > 0$ qui convenait pour la relation (3.4.1) au point x_1 ne convient manifestement plus pour (3.4.1) au point x_2.

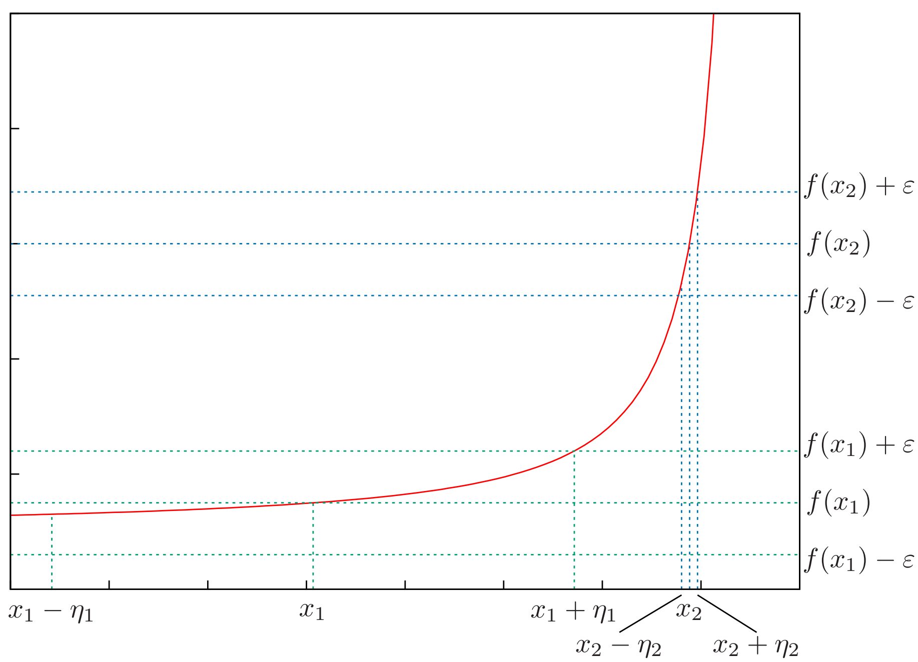


Figure 3.8 – La fonction f est continue aux points x_1 et x_2 mais le paramètre $\eta > 0$ dans (3.4.1) dépend a priori du point où on étudie la continuité.

3.4.1 Définitions

La classe de fonctions que nous allons définir sont précisément celles pour lesquelles le $\eta > 0$ dans (3.4.1) ne dépend pas du point x_1 où on étudie la continuité de la fonction : le η est universel ou *uniforme*.

Définition 3.62: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D_f si l'affirmation suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_0 \in D_f, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3.4.2}$$

ou de manière équivalente (x et x_0 jouant alors des rôles symétriques)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x' \in D_f, \left|x - x'\right| < \eta,\ \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon. \tag{3.4.3}$$

Insistons un peu : la relation (3.4.2) est très similaire à (3.4.1), à la différence notable que les quantificateurs $\forall x_1 \in I$ et $\exists \eta > 0$ ont été échangés. Dans (3.4.1), le $\eta > 0$ dépend du point x_1 considéré, alors que dans (3.4.2), on exige l'existence d'un $\eta > 0$ qui soit universel par rapport au point x_0 où on étudie la continuité.

Exemple 3.63: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$: soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = 2\varepsilon$. Alors pour tout $x, y \geqslant 1$ tels que $|x - x'| < \eta$, on a

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leqslant \frac{|x - x'|}{2} < \varepsilon,$$

car $\sqrt{x} + \sqrt{x'} \geqslant \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.

Proposition 3.64: *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. C'est évident de par la Définition 3.23. Si un $\eta > 0$ universel convient pour tout x_0, ce même η convient en tout point x_0 en particulier. □

La question naturelle est de savoir si la réciproque de la Proposition 3.64 est vraie. A la lumière du paragraphe motivant cette partie, on se dit que (par exemple) une fonction dont la pente augmente de plus en plus quand x augmente aura peu de chance d'être uniformément continue. La proposition suivante confirme que la réciproque n'est pas vrai *en général*.

Proposition 3.65: *La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Voir TD. □

3.4.2 Uniforme continuité et fonctions continues sur un segment

Il s'avère que la réciproque à la Proposition 3.64 est vraie dans le cas où la fonction considérée est définie et continue sur un segment.

Théorème 3.66 (Théorème de Heine): *Soit $a \leqslant b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f est uniformément continue sur [a,b].*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, x' \in [a, b]$ tels que $|x - x'| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors pour $\eta = \frac{1}{n+1}$, il existe $x_n, x'_n \in [a, b]$ tels que $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Comme $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a, b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \leqslant x'_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite dans ces inégalités, on déduit que $\ell \in [a, b]$.

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|x_{\varphi(n)} - \ell| = \left|x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)} + x'_{\varphi(n)} - \ell\right| &\leqslant |x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)}| + |x'_{\varphi(n)} - \ell|,\\ &\leqslant \frac{1}{\varphi(n)+1} + |x'_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1} + |x'_{\varphi(n)} - \ell|,\end{aligned}$$

Ainsi par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient alors que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

De plus, comme f est continue en $\ell \in [a, b]$, par la caractérisation séquentielle de la continuité, les suites $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Big(f(x'_{\varphi(n)})\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite $f(\ell)$. Par conséquent $\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui entre en contradiction avec $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc f est bien uniformément continue sur $[a, b]$.

□

Remarque 3.67: Par ce théorème, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ (car continue sur $[0, 1]$). Comme elle est uniformément continue sur $[1, +\infty[$, elle est en fait uniformément continue sur $[0, +\infty[$ tout entier.

3.4.3 Fonctions lipschitziennes

Définition 3.68: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$. On dit que f est lipschitzienne de rapport λ ou λ-lipschitzienne si*

$$\forall x, y \in D_f,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda\,|x - y|\,. \tag{3.4.4}$$

Exemple 3.69: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$: pour tout $x, y \geqslant 1$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$. Par contre, elle n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$: si tel était le cas, il existerait un $\lambda \geqslant 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \lambda\,|x - y|$. Et donc en particulier pour $y = 0$ et $x \neq 0$ on aurait $\sqrt{x} \leqslant \lambda x$ et donc $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \lambda$, ce qui est absurde car $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Proposition 3.70: *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Voir TD. □

Attention!

Il existe des fonctions uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes (cf. $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$).

Chapitre 4

Dérivabilité

Le but de ce chapitre est de revenir sur la notion de dérivabilité et les théorèmes usuels (théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis, formules de Taylor) qui s'y rapportent.

Dans tout le chapitre, on notera

$$I \text{ un intervalle contenant au moins deux points distincts.}$$

Ainsi si $a \in I$, alors $I \setminus \{a\}$ est non vide. De plus pour tout $\eta > 0$, on a $]a-\eta, a+\eta[\cap(I \setminus \{a\}) \neq \varnothing$. Ainsi on peut "s'approcher" de a en restant dans $I \setminus \{a\}$. Dit autrement, on a $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$ (on aurait pu faire cette hypothèse alternative sur I.

On élimine ainsi le cas $I = \{a\}$, car alors $I \setminus \{a\} = \varnothing$, qui est pourtant un intervalle mais ne contenant qu'un seul élément. Et les situations par exemple où a est un point isolé du type $I = [0,1] \cup \{2\}$, car ici I n'est pas un intervalle.

4.1 Définitions et rappels de propriétés

On se contente ici de rappels succincts sur la notion de dérivabilité ainsi que les règles et propriétés usuelles.

4.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 4.1 (Dérivabilité): *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction $\tau_{a,f} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définissant le taux d'accroissement de f en a*

$$\tau_{a,f} : x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{4.1.1}$$

admet une limite finie en a. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite, que l'on appelle nombre dérivée de f en a.

Définition 4.2 (Dérivabilité à gauche): *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que pour tout $\eta > 0$, $]a - \eta, a[\cap I \neq \varnothing$.*

On dit que f est dérivable en a à gauche si la fonction $\tau_{a,f}$ définie en (4.1.1) *admet une limite finie à gauche en a.*

Définition 4.3 (Dérivabilité à droite): *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que pour tout $\eta > 0$, $]a, a+\eta[\cap I \neq \varnothing$.*

On dit que f est dérivable en a à droite si la fonction $\tau_{a,f}$ définie en (4.1.1) admet une limite finie à droite en a.

Remarque 4.4:

— La condition pour tout $\eta > 0$, $]a-\eta, a[\cap I \neq \varnothing$ permet de s'assurer que l'on puisse parler d'une limite à gauche de f en a. Car alors $a \in \overline{]a-1, a[\cap I}$.

La condition pour tout $\eta > 0$, $]a, a+\eta[\cap I \neq \varnothing$ permet de s'assurer que l'on puisse parler d'une limite à droite de f en a.

— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$. Sachant les définitions données ci-dessus, dire que f est dérivable en a (ce qui est bien autorisé par la définition bien que a soit la borne inférieure du domaine de définition de f) c'est donc dire de manière équivalente que f est dérivable à droite en a.

On rappelle sans démonstration les résultats suivants.

Proposition 4.5: *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.*

1. Supposons que $a \in \overset{\circ}{I}$. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et ces dérivées sont égales.

2. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse.

3. Si f est dérivable en a, alors $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o_{x\to a}(x-a)$. Réciproquement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a i.e. il existe $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o_{x\to a}(x-a)$, alors f est dérivable en a et $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$.

4. Si $a \in \overset{\circ}{I}$ et si f a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse : contre-exemple $x \mapsto x^3$ en 0.

Remarque 4.6: La condition $a \in \overset{\circ}{I}$ dans l'Item 1. de la Proposition 4.5 permet d'assurer que pour tout $\eta > 0$, $]a, a+\eta[\cap I \neq \varnothing$ <u>et</u> $]a-\eta, a[\cap I \neq \varnothing$, donc que l'on puisse parler de limite à gauche <u>et</u> à droite de $\tau_{a,f}$.

4.1.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 4.7: *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. Si f est dérivable en tout $a \in I$, alors on dit que f est dérivable sur I. On note $f' : a \in I \mapsto f'(a)$ la fonction dérivée de f. L'ensemble des fonctions dérivable sur I est noté $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

2. Si f est dérivable sur I et de dérivée continue sur I, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, ou est continûment différentiable sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

3. Plus généralement, on pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$. On suppose que pour un $k \geqslant 1$, $f^{(k-1)}$ est bien définie sur I. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable en un point a de I, le nombre dérivée $\left(f^{(k-1)}\right)'(a)$ est noté $f^{(k)}(a)$ et dite la dérivée k-ième de f en a. Si de plus $f^{(k-1)}$ est dérivable en tout point a de I, on dira que f est k fois dérivable sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$.

4. Si f est k-fois dérivable sur I et de dérivée k-ième continue, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, ou est k-fois continûment différentiable sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R})$.

5. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \geqslant 1$. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Remarque 4.8: On a les inclusions suivantes pour tout $k \geqslant 1$

$$\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^k(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}). \quad (4.1.2)$$

Exemple 4.9: Les fonctions usuelles (polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques, hyperboliques) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition.

Attention!

Toute fonction dérivable en a est continue en a, mais bien sûr la réciproque est fausse ! Contre-exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Vous verrez plus tard qu'il existe des fonctions (et même une infinité de telles fonctions [a]) qui sont continues sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$! Des exemples célèbres en sont la fonction de Weierstrass [b] ou le mouvement Brownien [c].

a. https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_continue_nulle_part_dérivable
b. https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass
c. https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process

Attention!

Les inclusions de la Remarque 4.8 sont strictes : il existe par exemple des fonctions dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais qui ne sont pas dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, autrement dit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et } 0 \text{ si } x = 0. \quad (4.1.3)$$

4.1.3 Dérivation et somme, produit et composition

On rappelle sans démonstration que les somme, produit, quotient (sous réserve de dénominateur non nul), composée de fonctions dérivables sont dérivables. Plus précisément, pour toutes fonctions f et g, n fois dérivables sur leur ensemble de définition, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

— la fonction $\lambda f + g$ est n fois dérivable, et on a $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$ (la dérivation est linéaire),

— le produit fg est n fois dérivable et on a

$$\text{Formule de Leibniz :} \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (4.1.4)$$

La formule de Leibniz se prouve aisément par récurrence en utilisant que $(fg)' = f'g + fg'$ et l'identité bien connue $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

— La fonction $f \circ g$ est n fois dérivable (pourvu bien sûr que $f \circ g$ ait un sens). Il existe une formule pour la dérivée n-ième de la composée (Formule de Faà di Bruno), mais il faut surtout connaître (et savoir redémontrer !) que

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g',$$

où le "$\cdot$" symbolise ici le produit.

4.1.4 Dérivation d'une fonction réciproque

Proposition 4.10 (Dérivation de la réciproque): *Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et injective sur I. Pour tout point a de I tel que $f'(a) \neq 0$, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{4.1.5}$$

En particulier, si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{4.1.6}$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.56, on sait que $g = f^{-1}$ est continue en b (et même, par injectivité de g, quand $y \to b$ avec $y \neq b$, alors $g(y) \to g(b)$ avec $g(y) \neq g(b) = a$). Par hypothèse, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} f'(a)$. Par composition des limites, $\frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a} \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} f'(a)$. C'est exactement dire que $\frac{y-b}{g(y)-g(b)} \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} f'(a)$. Comme $f'(a) \neq 0$, l'inverse du quotient précédent converge aussi : $\frac{g(y)-g(b)}{y-b} \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} \frac{1}{f'(a)}$. □

Exemple 4.11: Cet exemple est la suite de l'Exemple 3.59 : les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ de dérivées respectives :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{et} \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.1.7}$$

Remarque 4.12: Une façon de retrouver heuristiquement la formule (4.1.6) (mais pas de la prouver [1] !) est d'appliquer la formule de dérivée d'une fonction composée : on a $g(f(x)) = x$, donc par dérivation, $g'(f(x))f'(x) = 1$ et donc $g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

4.2 Théorèmes de Rolle, théorèmes des accroissements finis

Dans toute cette section, on suppose que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Théorème 4.13 (Théorème de Rolle): *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f est continue sur $[a,b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

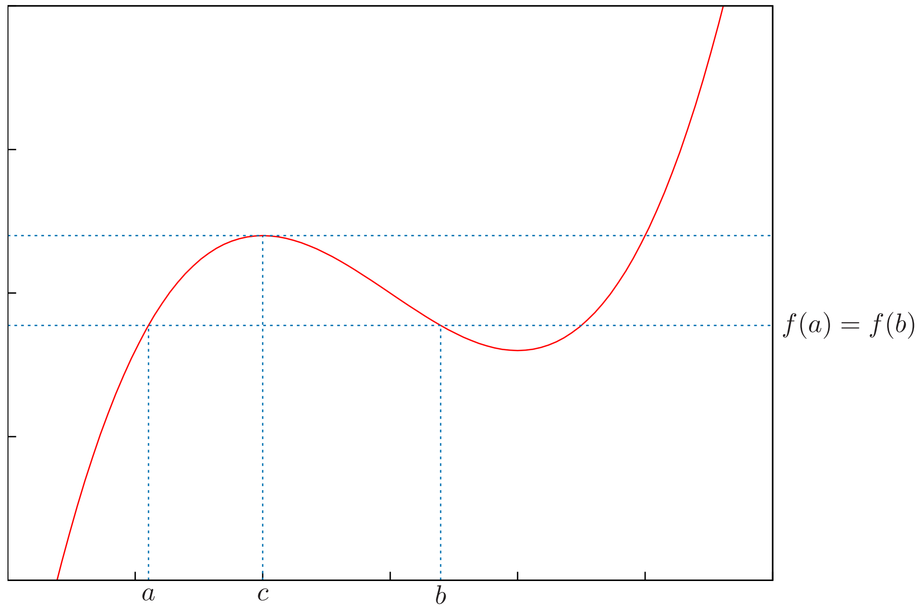


FIGURE 4.1 – Illustration du théorème de Rolle. Comme $f(a) = f(b)$ et que f est continue sur $[a, b]$, il existe au un moins point intérieur à $[a, b]$ en lequel f atteint son maximum ou son minimum. Comme f est dérivable en ce point (par hypothèse), nécessairement f admet en ce point une tangente nulle. Il est bien sûr possible d'avoir plusieurs c tels que $f'(c) = 0$ entre a et b.

alors il existe (au moins un) $c \in]a, b[$ *vérifiant* $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante, alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. Supposons f non constante. Alors f est continue sur $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $c, d \in [a, b]$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$. Comme f est non constante, on a nécessairement $f(c) < f(d)$. Supposons par l'absurde que $c \in \{a, b\}$ et $d \in \{a, b\}$. Alors comme $f(a) = f(b)$, on a $f(c) = f(d)$. Contradiction. Donc on a $c \notin \{a, b\}$ ou $d \notin \{a, b\}$.

Supposons que $c \in]a, b[$. Comme f est dérivable en c, puis $c \in \overset{\circ}{[a, b]} =]a, b[$ et que m est un minimum global de f, donc un extremum local de f, on a $f'(c) = 0$.

Le cas $d \in]a, b[$ se traite de la même manière. ☐

Corollaire 4.14: *Soit* $a < b$ *deux réels et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

1. f *continue sur* $[a, b]$,
2. f *dérivable en tout point de* $]a, b[$,

alors entre deux zéros distincts de f *il existe au moins un zéro de* f'.

Démonstration. C'est une application directe du Théorème de Rolle. ☐

1. On ne peut dériver la fonction $g = f^{-1}$ si on ne sait pas au préalable que g est dérivable.

Le théorème de Rolle permet de montrer un résultat similaire dans le cas où la fonction f ne satisfait plus forcément $f(a) = f(b)$. La conclusion est alors qu'il existe une tangente à f qui a la même pente que la pente moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. C'est le théorème des accroissements finis.

Théorème 4.15 (Théorème des accroissements finis): *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$*

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Démonstration. L'idée de la preuve est de se ramener, à partir de f, au cas d'une fonction qui prend des valeurs identiques en a et b. La manière la plus simple de réaliser ceci est de retrancher à f la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Soit donc $\phi : x \in [a, b] \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)\right)$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus pour tout $x \in]a, b[$, on a $\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Comme $\phi(a) = \phi(b)(= 0)$ (on a tout fait pour !), on peut appliquer le théorème de Rolle qui donne l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. D'où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Remarque 4.16: Dans la preuve, on aurait pu tout à fait également définir ϕ en retranchant simplement la droite de pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et valant 0 en 0 (donc sans le $f(a)$). On aurait alors eu $\phi(a) = \phi(b) = f(a)$.

Du théorème des accroissements finis, aussi appelé égalité des accroissement finis, on peut déduire l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 4.17 (Inégalité des accroissements finis): *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$.*

S'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant K$, alors pour tout $x, x' \in [a, b]$, on a $|f(x) - f(x')| \leqslant K|x - x'|$.

En particulier, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b - a|$.

Terminons cette section par un résultat qui énonce qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est nécessairement constante. Ce résultat est également une conséquence du théorème des accroissements finis.

Proposition 4.18: *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. On sait qu'une fonction constante et dérivable sur son domaine de définition est nécessairement de dérivée nulle (le taux d'accroissement est nul).

Réciproquement si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $f' = 0$, alors pour $x, x' \in I$, $x \leqslant x'$, comme I est un intervalle, on a $[x, x'] \subset I$. Et comme f est continue sur $[x, x']$, dérivable sur $]x, x'[$ et pour tout $t \in]x, x'[$, $|f'(t)| \leqslant 0$, par l'inégalité des accroissements finis, on obtient $|f(x) - f(x')| = 0$. On a donc montré que pour tout $x, x' \in I$, $f(x) = f(x')$ i.e. f est constante. $\square$

Remarque 4.19: Pour la réciproque, il est fondamental que I soit un intervalle. La fonction f définie sur $[0,1] \cup [2,3]$ valent 0 sur $[0,1]$ et 1 sur $[2,3]$ est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée nulle, mais n'est pas constante (puisque $f(0) \neq f(2)$).

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 Théorème fondamental de l'analyse

Le résultat suivant est fondamental en analyse : il relie intégrale et dérivée.

Théorème 4.20 (Théorème fondamental de l'analyse): *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons*

$$F : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a,b]$, on a $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a,b]$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\mathrm{d}t \right|, \\ &\leqslant \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\, \mathrm{d}t \right|, \\ &\leqslant \varepsilon |x - x_0|. \end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap [a,b]$, $x \neq x_0$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon.$$

On vient donc de montrer que $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$, c'est-à-dire F est dérivable en x_0, de dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$. Comme $x_0 \in [a,b]$ est quelconque, F est donc dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Comme f est continue sur $[a,b]$, F' l'est aussi, d'où F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. $\square$

Corollaire 4.21: *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a,b]$, i.e. F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Alors*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Posons $\tilde{F} : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Alors d'après le Théorème 4.20, $\tilde{F}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\tilde{F}' = f$. On a donc $(F - \tilde{F})' = F' - \tilde{F}' = f - f = 0$. Ainsi $F - \tilde{F}$ est constante sur le segment $[a,b]$, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F = \tilde{F} + c$.

On a donc $F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) + c - \tilde{F}(a) - c = \tilde{F}(b) = \int_a^b f(t)dt$. □

Corollaire 4.22: *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Comme f est une primitive de f' continue sur $[a,b]$, car f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, d'après le Corollaire 4.21, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f(t)dt$. □

4.3.2 Formules de Taylor

L'idée des formules de Taylor est la suivante : étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I et a un point intérieur à I, on souhaite approcher f au voisinage de a par une fonction plus simple [2]. La classe de fonctions choisie ici est celle des fonctions polynomiales. Cette notion est très naturelle si on pense à la notion de dérivée : nous avons vu que si f est dérivable au point x_0, alors nous avons le développement limité suivant, valable au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \to x_0}(x - x_0). \tag{4.3.1}$$

Ainsi, nous venons d'approcher f par le polynôme de degré 1 $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, modulo un terme d'erreur. L'idée générale des formules de Taylor est de poursuivre cette approximation : peut-on approcher f par un polynôme de degré 2, 3, etc. et peut-on quantifier l'erreur commise dans cette approximation ? La réponse est positive, pour peu que f soit suffisamment régulière au voisinage de x_0.

Définition 4.23: *Soit $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle I et soit x_0 un point intérieur à I. On suppose que f est n-fois dérivable en x_0. On définit le polynôme de Taylor de degré n de la fonction f au point x_0, comme la fonction*

$$x \mapsto P_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{4.3.2}$$

Exemple 4.24: Ainsi, les premiers polynômes de Taylor d'une fonction f (suffisamment

2. La notion de fonction plus simple est arbitraire : dans ce chapitre, l'idée est d'approcher une fonction f par des polynômes, qu'on estime plus faciles à manipuler que la fonction elle-même. Cette idée d'approcher une fonction f par une fonction plus simple est un principe très général qu'on retrouve à de multiples reprises en analyse selon le contexte et l'utilisation qu'on en fait. Par exemple, la construction de l'intégrale de Riemann repose sur le fait qu'on peut approcher une fonction continue par des fonctions constantes par morceaux (voir votre cours de L1). Autre exemple : le principe des séries de Fourier (que vous verrez plus tard) est d'approcher une fonction f 2π-périodique par les fonctions élémentaires $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$.

dérivable au point x_0) sont :

$P_0^{f,x_0}(x) = f(x_0)$ (polynôme constant, de degré 0),
$P_1^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (fonction affine, c'est la tangente à f en x_0),
$P_2^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ (polynôme du second degré),
$P_3^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$

Attention!
L'approximation d'une fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 n'a d'intérêt qu'au voisinage de x_0, c'est-à-dire sur un petit intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, pour $\varepsilon > 0$: à titre d'illustration, on se convaincra à la lecture de la Figure **??** que l'approximation de $f(x)$ par son polynôme de Taylor de degré 3 en $x_0 = 1$, i.e. $P_3^{f,1}(x)$ est sans doute très mauvaise pour $x' = 4$. Si on souhaite une bonne approximation de f au point $x' = 4$, il conviendra de considérer la famille des polynômes de Taylor $\left(P_n^{f,4}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de $\left(P_n^{f,1}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les formules de Taylor donnent une expression de l'erreur commise quand on remplace la fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n. La première formule de Taylor est la formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 4.25 (Formule de Taylor avec reste intégral): *Soit I un intervalle, $n \geqslant 1$, $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I. On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors on a, pour $x \in I$,*

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u. \tag{4.3.3}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, cela résume à écrire, pour f de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(u)\mathrm{d}u,$$

ce qui est exactement le Corollaire 4.22. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit maintenant f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. Alors en particulier, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et donc par hypothèse de récurrence

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u.$$

Intégrons par parties le reste :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u &= \left[-\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\right]_{u=x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u,\\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u, \\
&= P_{n+1}^{f,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

D'où la propriété par récurrence. □

Théorème 4.26 (Formule de Taylor-Lagrange): *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et dont la dérivée n-ième est dérivable sur I. Alors pour tout $x_0, x \in I$, il existe $c \in]x_0, x[$ tel que*

$$
f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.3.4}
$$

Démonstration. C'est une application du théorème de Rolle. Voir TD. □

Remarque 4.27: Il est possible de donner un énoncé un peu plus précis de cette formule de Taylor-Lagrange. En effet, comme on applique le théorème de Rolle, la dérivabilité n'est nécessaire que sur l'intérieur de l'intervalle. On peut donc par exemple énoncer que pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$, on a pour tout $x_0, x \in [a,b]$, l'existence de $c \in]x_0, x[$ tel que

$$
f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.3.5}
$$

Théorème 4.28 (Formule de Taylor-Young): *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ dont on suppose qu'elle admet une dérivée d'ordre n au point x_0. Alors, pour $x \in I$*

$$
f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \tag{4.3.6}
$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$

Démonstration. La preuve utilise le théorème des accroissements finis généralisés. Voir TD. □