Analyse 3

Licence Mathématiques et Informatique 2e année

1er semestre 2024-2025

Quentin Denoyelle - quentin.denoyelle@u-paris.fr
Irène Kaltenmark - irene.kaltenmark@u-paris.fr

4 décembre 2024

Chapitre 3

Fonctions réelles de la variable réelle, continuité

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f, ensemble de définition de f, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On définira en particulier rigoureusement les notions de limite et de continuité.

3.1 Limites d'une fonction réelle de la variable réelle

3.1.1 Bases de topologie

Avant de commencer, définissons la droite achevée qui nous sera utile pour énoncer de manière condensée les différentes définitions de la limite d'une fonction.

Définition 3.1 (Droite achevée): *On appelle droite achevée l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

Remarque 3.2: Les éléments $+\infty$ et $-\infty$ sont définis respectivement comme le plus grand élément et le plus petit élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi toute partie $A \subset \mathbb{R}$ vue comme un sous ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$ admet au moins un majorant et un minorant qui sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$. Et par conséquent $A \subset \mathbb{R}$ non vide admet toujours une borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui peuvent donc être $+\infty$ et $-\infty$.

On peut étendre certaines des opérations entre les réels pour les éléments $+\infty$ et $-\infty$ comme par exemple $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a + (-\infty) = -\infty$, pour tout $a > 0$, $a \times (+\infty) = +\infty$ etc... Cependant on ne donne pas de sens à $(+\infty) - (+\infty)$ ou encore $\frac{+\infty}{0}$.

Définition 3.3 (Voisinage): *Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que V est voisinage de x s'il existe $\eta > 0$ tel que $]x-\eta, x+\eta[\subset V$. Autrement dit, un voisinage de x est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en x.

2. On dit que V est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]B, +\infty[\subset V$ (resp. $]-\infty, B[\subset V$).

Définition 3.4 (Point intérieur, intérieur): *Soit $A \subset \mathbb{R}$.*

1. On dira que $x \in A$ est un point intérieure *à A, si A est un voisinage de x.*

2. On appelle intérieur de A*, noté* $\overset{\circ}{A}$*, l'ensemble des points intérieurs de* A*. On a par définition* $\overset{\circ}{A} \subset A$*.*

Exemple 3.5: — Soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\eta > 0$, $V =]x-\eta, x+\eta[$ est un voisinage de x ; de même pour $V = [x-\eta, x+\eta]$ puisque $]x - \frac{\eta}{2}, x + \frac{\eta}{2}[\subset V$.

— Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $]a, +\infty[$ et $[a, +\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$ et $]-\infty, a[$ et $]-\infty, a]$ sont des voisinages de $-\infty$.

— Tout intervalle ouvert $]a, b[$ est voisinage de tous ses points. En effet, pour tout $x \in]a, b[$, prenons $\eta = \min\left(\frac{b-x}{2}, \frac{x-a}{2}\right) > 0$. Alors $x - \eta \geqslant x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} > a$ car $x > a$. De même, $x + \eta \leqslant x + \frac{b-x}{2} = \frac{x+b}{2} < b$ car $x < b$. Ainsi $]a, b[$ contient $]x-\eta, x+\eta[$ et donc $]a, b[$ est un voisinage de x.

— Par contre, l'intervalle $]a, b]$ fermé en b n'est pas un voisinage de b car aucun intervalle de type $]b-\eta, b+\eta[$ n'est contenu dans $]a, b]$ (ça "dépasse" à droite !).

— $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$.

— $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$ puisqu'aucun intervalle n'est inclus dans $\mathbb{N}$.

Définition 3.6 (Ouvert): *On dira que* $A \subset \mathbb{R}$ *est un ouvert si* $A = \overset{\circ}{A}$*, i.e. si* A *est voisinage de chacun de ses points.*

Exemple 3.7: Pour $a < b$, $]a, b[$ est un ouvert mais pas $]a, b]$. La réunion $]0, 1[\cup]2, 3[$ est un autre exemple d'ouvert, ainsi que l'intervalle $]a, +\infty[$.

Définition 3.8 (Adhérent): *Soit* $A \subset \mathbb{R}$*.*

1. On dit que x *est adhérent à* A *si pour tout voisinage* V *de* x*, on a* $V \cap A \neq \varnothing$*. On note alors ceci :* $x \in \overline{A}$*.*

2. On dira que $+\infty$ *est adhérent à* A *si pour tout voisinage* V *de* $+\infty$*, on a* $V \cap A \neq \varnothing$*. On note alors ceci :* $+\infty \in \overline{A}$*.*

3. On dira que $-\infty$ *est adhérent à* A *si pour tout voisinage* V *de* $-\infty$*, on a* $V \cap A \neq \varnothing$*. On note alors ceci :* $-\infty \in \overline{A}$*.*

Remarque 3.9: Comme tout voisinage V de x contient par définition un intervalle $]x-\eta, x+\eta[$ pour une certain $\eta > 0$, on peut réécrire la définition précédente comme ceci : on dit que x est adhérent à A si pour tout $\eta > 0$, $]x-\eta, x+\eta[\cap A \neq \emptyset$.

Similairement, $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à A si et seulement si il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]B, +\infty[\cap A \neq \varnothing$ (resp. $]-\infty, B[\cap A \neq \varnothing$).

D'après la définition, un réel adhérent à un ensemble A est donc un point que l'on peut approcher de manière arbitrairement proche par des éléments de A. De même dire que $+\infty$ (ou $-\infty$) est adhérent à A, c'est dire que l'on peut trouver des éléments de A arbitrairement grand positif (ou négatif).

Exemple 3.10: — Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide. Alors tout élément x de A est adhérent à A (puisque $x \in A \cap]x-\eta, x+\eta[$ pour tout $\eta > 0$).

— Si $A =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup [2, 3[$, alors tous les éléments de $[-1, 1] \cup [2, 3]$ sont adhérents à A (le montrer en exercice). Par contre $-\infty$, $\frac{5}{4}$ on encore $\frac{7}{2}$ ne sont pas adhérents à A (idem à faire en exercice).

— Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré. Alors $\sup(A) \in \overline{A}$. Voir TD.

— $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$. En effet, soit V un voisinage de $+\infty$, alors il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]B, +\infty[\subset V$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > B$ (si $B \geqslant 0$ on prend $N = 0$, sinon $N = E(B) + 1$). Par conséquent $N \in]B, +\infty[\cap \mathbb{N} \subset V \cap \mathbb{N}$. D'où $V \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.

  On peut donc "s'approcher" de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$.

  Plus généralement $-\infty$ et $+\infty$ sont adhérents à $\mathbb{Z}$.

— $+\infty$ et $-\infty$ sont adhérents à $\mathbb{Q}$ car $+\infty$ et $-\infty$ sont adhérents à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

— $+\infty$ n'est pas adhérent à l'ensemble $\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$.

La définition d'être adhérent fait intervenir des voisinages. On peut reformuler ces définitions et en donner des versions équivalentes faisant intervenir des suites.

Proposition 3.11 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence): *Soit $A \subset \mathbb{R}$.*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>d'éléments de A</u> qui converge vers x.

2. On a $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à A si et seulement si il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite <u>d'éléments de A</u> qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. 1. On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) On suppose que $x \in \overline{A}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $V_n =]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}[$ est un voisinage de x, donc $V_n \cap A \neq \varnothing$ i.e. il existe $u_n \in A$ tel que $x - \frac{1}{n+1} < u_n < x + \frac{1}{n+1}$. Ainsi par le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers x.

($\Leftarrow$) Notons u une suite d'éléments de A qui converge vers x. Soit V un voisinage de x. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset V$. Comme u converge vers x, en appliquant la définition pour $\varepsilon = \eta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n \in]x - \eta, x + \eta[$, d'où en particulier $u_N \in V$. Or $u_N \in A$, donc $V \cap A \neq \varnothing$. On a bien $x \in \overline{A}$.

2. La démonstration est similaire au cas précédent en adaptant la nature des voisinages. À faire en exercice !

□

Définition 3.12 (Densité): *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est* dense *dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in \overline{A}$.*

Remarque 3.13: Dire que A est dense dans $\mathbb{R}$ signifie que tout $x \in \mathbb{R}$ peut être approché de manière arbitrairement proche par des éléments de A.

Un résultat important de densité est le suivant.

Théorème 3.14: *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons la suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 10^{-n}E(10^n x).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$ et par définition de la partie entière on a

$$10^{-n}E(10^n x) \leqslant x < 10^{-n}E(10^n x) + 10^{-n},$$

donc

$$x - 10^{-n} < u_n \leqslant x.$$

Par le théorème des gendarmes on obtient que la suite de nombres rationnels u converge bien vers x, i.e. x est adhérent à $\mathbb{Q}$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$. □

On aura besoin dans la suite de la notion de propriété vraie dans un voisinage d'un point ou de $\pm\infty$.

Définition 3.15 (Propriété vraie dans un voisinage): *Soit P une propriété. Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.*

On dira que P est vraie au voisinage de x_0, s'il existe un voisinage V de x_0 tel que P est vraie sur V.

On dit parfois à la place de "au voisinage de..." : "localement en...".

Exemple 3.16: Voici quelques exemples de propriétés vraies dans un voisinage. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

— Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dira f est bornée au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ (ou localement bornée en x_0) s'il existe $\eta > 0$ et $M \geqslant 0$ tels que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x)| \leqslant M$.

  On dira que f est localement bornée en $+\infty$ s'il existe $B \in \mathbb{R}$ et $M \geqslant 0$ tels que pour tout $x > B$, $|f(x)| \leqslant M$.

  La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est localement bornée en 1, mais n'est pas localement bornée en $+\infty$.

— Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. f est localement non nulle (resp. positive, resp. strictement positive) en x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) \neq 0$ (resp. $f(x) \geqslant 0$, resp. $f(x) > 0$).

  La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - 1$ n'est pas localement non nulle en $x_0 = 0$ car il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel cette fonction ne s'annule pas.

Remarque 3.17: Pour qu'il soit légitime de parler d'une propriété vraie dans un voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ pour une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, il faut que l'on puisse trouver au moins un voisinage V de x_0 tel que $V \subset D_f$. Par exemple dans le cas d'une propriété que l'on veut investiguer dans un voisinage de $x_0 \in D_f$, cela suppose qu'il existe au moins un $\eta > 0$ tel que $]x - \eta, x + \eta[\subset D_f$. Or il existe des fonctions f pour lesquelles cette condition n'est jamais vérifier.

Considèrons la fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ constante valant 1, alors on ne peut pas dire que f est localement bornée en 0 car il n'existe aucun voisinage V de 0 sur lequel f est définie (il existe des nombres irrationnels arbitrairement petit). Pourtant la fonction f étant constante sur $\mathbb{Q}$, elle est bien bornée, donc on aimerait pouvoir dire qu'elle est également localement bornée.

Considérons la fonction $f : n \in \mathbb{N} \mapsto 1 - \frac{2}{n+1}$ (que l'on peut identifier à une suite réelle puisque c'est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. On aimerait donc pouvoir dire que f est strictement positive dans un voisinage de $+\infty$. Mais de nouveau le domaine de définition de f ne contient aucun voisinage de $+\infty$.

Pour toutes ces raisons, on parle plus généralement de propriété vraie dans un voisinage *relativement à un ensemble*. Ainsi on dira par exemple que la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est localement bornée en $+\infty$ relativement à D_f, s'il existe un voisinage V de $+\infty$ tel que f est bornée sur $V \cap D_f$.

En pratique, dans la suite, quand on énonce une propriété P pour une fonction f dans un voisinage d'un $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et que l'on ne sait rien, a priori, de D_f, on dira que f satisfait la propriété P localement en x_0 (ou au voisinage de x_0) dans D_f pour signifier qu'elle est vraie dans un voisinage de x_0 relativement à D_f.

3.1.2 Notions de limite d'une fonction et premières propriétés

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction avec D_f non vide. On souhaite définir proprement la notion de limite de f en un point x_0 de D_f. Notons une différence avec la notion de limite concernant les suites vue au Chapitre 2 : prendre la limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à ne considérer que la limite pour $n \to +\infty$. Dans ce cas, la limite peut exister et être finie ($\ell \in \mathbb{R}$), infinie ($+\infty$ ou $-\infty$, suites divergentes du premier ordre) ou bien ne pas exister (suites divergentes du second ordre).

Dans le cas d'une fonction, la situation est plus diverse. On peut étudier la limite de f en $+\infty$, comme dans le cas des suites, mais aussi lorsque en $-\infty$ ou encore en $x_0 \in \mathbb{R}$. Dans tous ces cas, pour qu'il soit légitime d'étudier ces limites, il faut que l'on puisse s'approcher de $+\infty$, ou $-\infty$, ou $x_0 \in \mathbb{R}$ dans D_f donc que successivement on ait $+\infty \in \overline{D_f}$, ou $-\infty \in \overline{D_f}$, ou $x_0 \in \overline{D_f}$. Ces hypothèses seront systématiquement un prérequis dans la suite lorsque l'on manipulera de telles limites afin que la discussion ait un sens.

Regardons sur des exemples ces quelques cas génériques qu'il est possible de considérer. Notez que les exemples proposés ci-dessous mériteraient à chaque fois une démonstration. Vous pouvez vous y essayer en utilisant les définitions données a posteriori.

1. Une première situation est celle où on étudie la limite de f en $x_0 \in \mathbb{R}$. Il faut donc $x_0 \in \overline{D_f}$. Cela concerne par exemple le cas où $D_f =]a, b[$, avec $a < b$, et alors on peut considérer la limite de f en tout $x_0 \in [a, b]$, ou bien $D_f =]a, +\infty[$ et alors on peut regarder la limite en tout $x_0 \in [a, +\infty[$ etc...

a) Dans ce cas, il se peut que f admette une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0.

Exemple 3.18: La fonction $f : x \mapsto x^2$ admet comme limite 9 en $x_0 = 3$.

Exemple 3.19: La fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet pour limite 0 en $x_0 = 0$.

b) Il se peut aussi que f admette une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) en x_0. Notons que cela implique nécessairement que $x_0 \in \overline{D_f} \setminus D_f$, car si $x_0 \in D_f$ alors $f(x_0)$ est bien défini et est un réel.

Exemple 3.20: La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ qui est bien adhérent à l'ensemble $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

c) Il se peut enfin que f n'admette pas de limite en x_0 :

Exemple 3.21: La fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.

2. Un autre cas générique concerne l'étude d'une éventuelle limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$), il faut alors que $+\infty \in \overline{D_f}$ (resp. $-\infty \in \overline{D_f}$).

a) Cette limite peut exister et être finie :

Exemple 3.22: La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-x)$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

b) Cette limite peut être infinie :

Exemple 3.23: La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

c) Cette limite peut ne pas exister :

Exemple 3.24: La fonction définie par $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ n'admet pas de limite en $-\infty$.

Les deux définitions qui suivent explicitent la notion de limite dans les différents cas génériques évoqués ci-dessus.

Définition 3.25 (Limite pour $x \to x_0 \in \mathbb{R}$): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_0 \in \overline{D_f}$.*

1. ***Cas d'une limite finie.*** *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On notera alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

2. ***le cas d'une limite infinie.***

a) On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ f(x) > M.$$

On notera alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

b) On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ f(x) < -M.$$

On notera alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Définition 3.26 (Limite quand $x \to \pm\infty$): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$.*

1. ***Le cas d'une limite finie quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.***

a) le cas $x \to +\infty$: on suppose que $+\infty \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

b) Le cas $x \to -\infty$: on suppose que $-\infty \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in] - \infty, B[\cap D_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. ***Le cas d'une limite $+\infty$ quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.***

a) le cas $x \to +\infty$: on suppose que $+\infty \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ f(x) > M.$$

On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

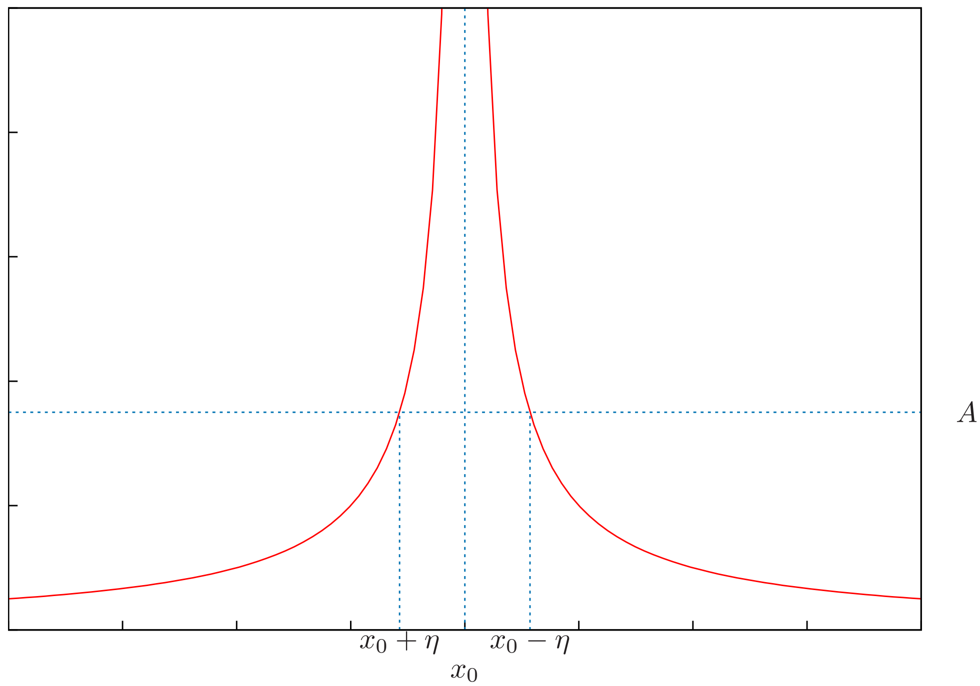


FIGURE 3.1 – Ici, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$: pour tout $A > 0$, il existe un petit intervalle $]x_0-\eta, x_0+\eta[$ (dont la taille dépend de ε et de x_0) sur lequel $f(x) > A$.

b) Le cas $x \to -\infty$: on suppose que $-\infty \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall M > 0,\, \exists B \in \mathbb{R},\, \forall x \in]-\infty, B[\cap D_f,\ f(x) > M.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. ***Le cas d'une limite $-\infty$ quand $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.***

a) le cas $x \to +\infty$: on suppose que $+\infty \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\, \exists B \in \mathbb{R},\, \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ f(x) < -M.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Le cas $x \to -\infty$: on suppose que $-\infty \in \overline{D_f}$. On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall M > 0,\, \exists B \in \mathbb{R},\, \forall x \in]-\infty, B[\cap D_f,\ f(x) < -M.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque 3.27: Les Définitions 3.25 et 3.26 quantifient précisément la notion intuitive selon laquelle $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ quand x est proche de x_0. Des exemples de convergence sont illustrés en Figures 3.1 et 3.2.

Remarque 3.28: La liste précédente est longue mais on attire l'attention du lecteur sur le fait que des briques élémentaires se répètent parmi les différentes définitions, selon qu'on considère les cas $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ d'une part et une limite finie ou infinie d'autre part.

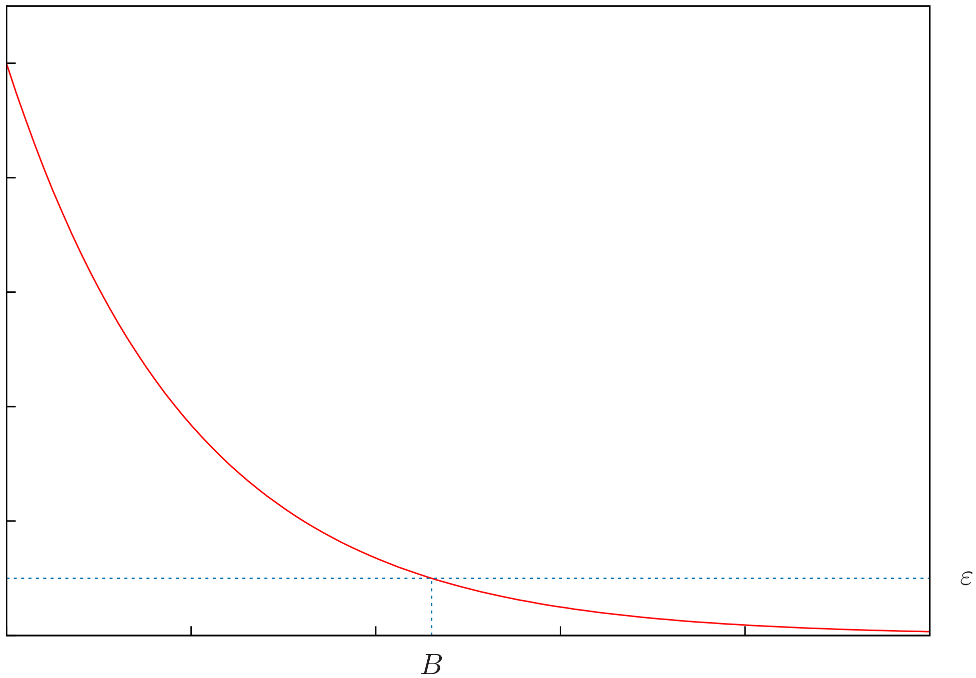


FIGURE 3.2 – Ici, $D_f = [M, +\infty[$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $B > 0$ (qui dépend de ε) tel que pour $x > B$, on a $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$.

Exemple 3.29: Reprenons certains exemples évoqués au début de ce paragraphe :

— Exemple 3.18 : soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{8}, 1\right)$ et $x \in]3-\eta, 3+\eta[$. Alors $|x-3| < \eta$ et $|x| \leqslant |x-3| + 3 \leqslant \eta + 3 \leqslant 4$. On a $|x^2 - 9| = |x-3||x+3| \leqslant \eta(|x|+3) \leqslant \frac{\varepsilon}{8}7 < \varepsilon$. Donc la limite de $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ pour $x \to 3$ existe et vaut 9.

— Exemple 3.22 : soit $\varepsilon > 0$. Alors en posant $B = -\ln(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x > B$, $0 < \exp(-x) < \varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x) = 0$.

— Exemple 3.23 : soit $M > 0$ arbitraire. Posons $B = \sqrt{M}$. Alors pour tout $x > B$, $x^2 > B^2 = M$. Donc $x \mapsto x^2$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Lorsque l'on sait qu'une fonction admet une limite en un point ou en $\pm\infty$, on peut en déduire certaines propriétés locales pour la fonction. La proposition suivante en énonce quelques unes dans le cas où la limite est finie.

Proposition 3.30 (Limite finie et propriétés locales): *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_0 \in \overline{D_f}$.*

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors f est bornée au voisinage de x_0 dans D_f, i.e. il existe $M \geqslant 0$ et un voisinage de V de x_0 tels que pour tout $x \in V \cap D_f$, $|f(x)| \leqslant M$.

2. Si de plus, $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), alors f est strictement positive (resp. strictement négative) dans un voisinage de x_0 dans D_f, i.e. il existe V voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap D_f$, $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$). En particulier, f ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 dans D_f.

Démonstration. On ne traite ici que le cas $x_0 \in \mathbb{R}$ et le premier point. Le reste est laissé à titre d'exercice.

Comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - \ell| < 1$, d'où $|f(x)| \leqslant |f(x) - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$. Posons $V =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, qui est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, on a bien montré qu'il existe $M = |\ell| + 1$ tel que pour tout $x \in V \cap D_f$, $|f(x)| \leqslant M$. La fonction f est bien localement bornée en x_0. $\square$

Remarque 3.31: — Notez bien l'importance dans l'énoncé de la Proposition 3.30 de considérer un voisinage relativement à D_f i.e. considérer les $x \in V \cap D_f$ au lieu de $x \in V$, pour V un voisinage de x_0, car on ne sait pas a priori si $V \subset D_f$. Voir la discussion de la Remarque 3.17.

— La liste ci-dessus de propriétés locales que l'on peut énoncer pour une fonction vérifiant une certaine limite en un $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ est loin d'être exhaustive. Voir les TD pour d'autres exemples.

Proposition 3.32 (Composées de limites): *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ telles que $f(D_f) \subset D_g$. Soient $x_0, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que $x_0 \in \overline{D_f}$. Si les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$,
2. $\lim_{x\to \ell} g(x) = \ell'$,

alors

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell'.$$

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où ℓ, ℓ', x_0 sont des réels, les autres cas sont laissés à titre d'entraînement. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{y\to \ell} g(y) = \ell'$, on a

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall y \in]\ell - \eta_1, \ell + \eta_1[\cap D_g,\ |g(y) - \ell'| < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Appliquons maintenant la définition de la convergence $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$ pour la donnée de ce $\eta_1 > 0$: il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\cap D_f$, on a $|f(x) - \ell| < \eta_1$. Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\cap D_f$, on a $f(x) \in]\ell - \eta_1, \ell + \eta_1[\cap D_g$ (car $f(D_f) \subset D_g$) et donc en appliquant (3.1.1) (pour $y = f(x)$), on obtient que $|g(f(x)) - \ell'| < \varepsilon$. On a bien prouvé que $g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell'$. $\square$

On peut également définir les notions de limite à droite et à gauche en un $x_0 \in \mathbb{R}$.

Définition 3.33 (Limite à droite et à gauche en un point): *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.*

1. ***Limites à gauche.*** *On suppose que*

$$x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D_f}. \tag{3.1.2}$$

a) On dit que f a pour limite ℓ à gauche en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

et on note $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell$, ou encore $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$. La valeur de la limite à gauche de f en x_0 quand elle existe est également parfois notée $f(x_0^-)$.

b) On dit que f a pour limite $+\infty$ à gauche en x_0 si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ f(x) > M,$$

et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$*, ou encore* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

c) On dit que f a pour limite $-\infty$ à gauche en x_0 si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ f(x) < -M,$$

et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$*, ou encore* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

2. ***Limites à droite.*** *On suppose que*

$$x_0 \in \overline{]x_0, x_0 + 1[\cap D_f}. \tag{3.1.3}$$

a) On dit que f a pour limite ℓ à droite en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$*, ou encore* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$*. La valeur de la limite à droite de f en x_0 quand elle existe est également parfois notée $f(x_0^+)$.*

b) On dit que f a pour limite $+\infty$ à droite en x_0 si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f,\ f(x) > M,$$

et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$*, ou encore* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.

c) On dit que f a pour limite $-\infty$ à droite en x_0 si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f,\ f(x) < -M,$$

et on note $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$*, ou encore* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Remarque 3.34: 1. Les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) permettent d'assurer qu'il est possible d'approcher x_0 par la gauche, respectivement par la droite, dans D_f. Elles remplacement l'hypothèse $x_0 \in \overline{D_f}$ dans le cas de la limite de f en x_0.

2. $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ sont uniquement des notations pour représenter les valeurs des limites finies de f en x_0 à gauche et à droite. De même x_0^- et x_0^+ ne représentent pas des nombres réels, ce sont simplement des notations utilisées dans l'écriture des limites à gauche et à droite de f en x_0.
On réserve l'utilisation des notations $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ seulement quand les limites à gauche et à droite de f en x_0 sont finies. Par conséquent quand on dira dans la suite par exemple que $f(x_0^-)$ existe, cela revient à dire que f admet une limite à gauche en x_0 et que celle-ci est finie.

Exemple 3.35: Démontrer les résultats suivants en utilisant les définitions en guise d'entraînement.

— La fonction E *partie entière* admet une limite à gauche en 1 qui vaut 0 et une limite à droite en 1 qui vaut 1.

— La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, admet une limite à gauche en 0 qui vaut $-\infty$ et une limite à droite en 0 qui vaut $+\infty$. Notez que cette fonction n'admet par contre pas de limite en 0.

— La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$, admet une limite à gauche en 0 qui vaut $+\infty$ et une limite à droite en 0 qui vaut $+\infty$. Elle admet en fait une limite en 0 qui vaut $+\infty$.

  Plus généralement, si $f : D_f \to \mathbb{R}$ admet une limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors si les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) sont satisfaites, f admet la même limite à gauche et à droite en x_0.

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction valant 0 sur tout $\mathbb{R}$, sauf $f(0) = 1$. Alors f n'admet pas de limite 0. Par contre f admet une limite à gauche et à droite et $f(0^-) = f(0^+) = 0$.

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite et conséquences

Proposition 3.36 (Caractérisation séquentielle de la limite): *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $x_0 \in \overline{D_f}$. Alors on a l'équivalence entre*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$,

2. pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>d'éléments de D_f</u> qui tend vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

Démonstration. On traite uniquement le cas où x_0 est un réel et la limite ℓ est finie. On laisse les autres cas à titre d'entraînement.

Raisonnons par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de D_f qui tend vers x_0. Montrons alors que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0, en appliquant la définition pour ce $\eta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Or comme la suite u est à valeurs dans D_f, on a donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, et donc $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$. Nous venons bien de prouver que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

($\Leftarrow$) Supposons par l'absurde que f ne tend pas vers ℓ en x_0. Ainsi il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$ tel que $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors en posant $\eta_n = \frac{1}{n+1} > 0$, il existe donc $u_n \in]x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1}[\cap D_f$ tel que $|f(u_n) - l| \geqslant \varepsilon_0$. Mais alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 (par application du théorème des gendarmes) et donc par hypothèse, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Ceci entre en contradiction avec le fait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - \ell| \geqslant \varepsilon_0.$$

Par conséquent on a bien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$. □

Remarque 3.37: 1. La Proposition 3.36 est particulièrement utile car elle permet de prouver l'existence de limites sans se ramener à des ε et des η ; on peut utiliser toute la machinerie sur les suites vue dans le Chapitre 2.

2. Par ailleurs, ce résultat est également utile pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en x_0 : il suffit pour cela d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers x_0 mais telles que les suites images $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites différentes. Revenons à l'Exemple 3.21 : posons pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Les suites u et v ainsi définies tendent vers 0. Par contre, $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ alors que $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ pour $n \geqslant 1$. Ainsi $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne peut admettre une limite en 0. Le même argument fonctionne pour l'Exemple 3.24 (considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \pi n$ et $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$).

La Proposition 3.36 permet aussi de transposer sans preuve supplémentaire des résultats connus du Chapitre 2 à propos des suites en des résultats similaires sur les fonctions.

Dans ce qui suit, on considère $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ et $h : D_h \to \mathbb{R}$ sont des fonctions et $x_0, \ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On supposera implicitement si nécessaire que les ensembles de définitions de ces fonctions sont d'intersection non vide et que les limites s'entendent selon le domaine de définition commun. Dans ce contexte, les résultats suivants sont vrais :

a) si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$, alors ℓ est unique,

b) si f est bornée au voisinage de x_0 dans D_f et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$. Cette propriété prouve en particulier la limite de l'exemple 3.19,

c) si f est minorée au voisinage de x_0 dans D_f et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$, alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$,

d) les opérations sur les limites de fonctions sont identiques à celles sur les suites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient...),

e) passage à la limite dans une inégalité : si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell' \in \mathbb{R}$ et si pour tout x sur un voisinage de x_0 dans $D_f \cap D_g$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\ell \leqslant \ell'$,

f) passage à la limite dans une inégalité : si pour tout x dans un voisinage de x_0 dans $D_f \cap D_g$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$. Si par contre $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$,

g) Théorème des gendarmes : si pour tout x dans un voisinage de x_0 dans $D_f \cap D_g \cap D_h$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.

Remarque 3.38: Notez bien sûr que l'on pourrait prouver chacune des propriétés précédentes directement à partir des définitions 3.25 et 3.26, sans passer par la Proposition 3.36.

3.2 Notations de Landau, négligeabilité, équivalence

Définition 3.39: *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $x_0 \in \overline{D_f \cap D_g}$.*

1. *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\varepsilon : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 telle que pour tout $x \in V \cap D_f \cap D_g$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. On note alors*

$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)).$$

2. *On dit que f est équivalent à g en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\delta : D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ de limite 1 en x_0 telle que pour tout $x \in V \cap D_f \cap D_g$, $f(x) = \delta(x)g(x)$. On note alors*
$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x).$$

Remarque 3.40: Lorsque g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, on a

$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ et } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{3.2.1}$$

En particulier,

$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \text{ et } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell, \text{si } \ell \in \mathbb{R}^*. \tag{3.2.2}$$

On dispose du critère séquentiel suivant.

Proposition 3.41: *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $x_0 \in \overline{D_f \cap D_g}$. On a alors l'équivalence entre*

1. $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$,
2. *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D_f \cap D_g$ qui tend vers x_0, $f(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(g(u_n))$,*

ainsi que

1. $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$,
2. *pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D_f \cap D_g$ qui tend vers x_0, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.*

De cette caractérisation séquentielle se déduisent les propriétés similaires de manipulation de la négligeabilité et des équivalents vues pour les suites.

Exemple 3.42: Négligeabilités et équivalences classiques : pour tout $0 < \alpha < \beta$ et $a > 0$

$$\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha), \; x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta), \text{ et } x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\beta x}\right), \tag{3.2.3}$$

$$\ln(x) = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \; x^\beta = \underset{x\to 0}{o}(x^\alpha), \tag{3.2.4}$$

ainsi que, pour $\alpha > 0$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \; e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x, \; (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1+\alpha x, \; \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \text{ et } 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}. \tag{3.2.5}$$

3.3 Continuité

3.3.1 Définition de la continuité et premières propriétés

Définition 3.43 (Continuité en un point): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.*

On dit que f est continue en x_0 si f admet $f(x_0)$ comme limite en x_0. Dans le cas contraire, on dira que f est discontinue en x_0.

On a donc f continue en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \eta > 0, \, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, \, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Remarque 3.44: Dans la définition de la continuité en un point, il n'est en fait pas nécessaire de préciser que la limite de f en x_0 est $f(x_0)$. Il suffit d'imposer que f admet une limite en x_0, car alors comme $x_0 \in D_f$, on a pour tout $\eta > 0$, $x_0 \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, et donc la limite doit forcément valoir $f(x_0)$.

Définition 3.45 (Continuité globale): *On dira que f est continue sur D_f si elle est continue en chacun des points de D_f. Soit I un intervalle. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.*

Remarque 3.46: On rappelle sans démonstration que les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.

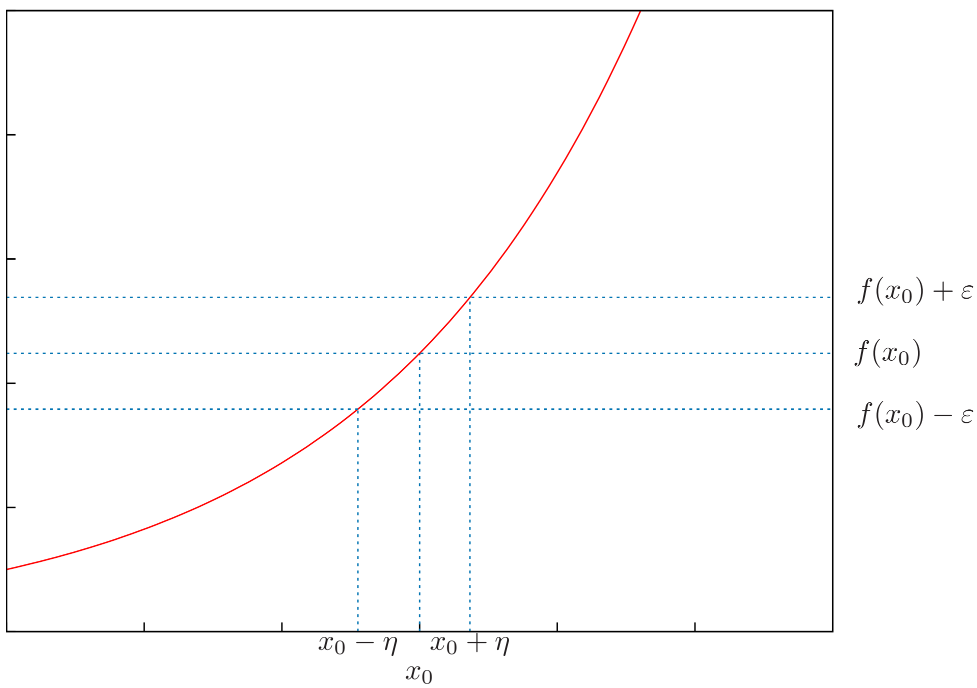


Figure 3.3 – La fonction f est continue en x_0 : pour tout intervalle $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ de longueur arbitraire autour de $f(x_0)$, il existe un petit intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (dont la taille dépend de ε et de x_0) sur lequel f prend toutes ses valeurs dans $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

La proposition suivante est fondamentale car elle donne une caractérisation de la continuité en un point via des suites.

Proposition 3.47 (Caractérisation séquentielle de la continuité): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$.*

On a f est continue en x_0 si et seulement si pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui converge vers x_0, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration. On a f continue en x_0 si et seulement si f admet $f(x_0)$ comme limite en x_0. Or d'après la caractérisation séquentielle de la limite (Proposition 3.36), ceci est équivalent à dire que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f qui converge vers x_0, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$. Ce qui est exactement ce que l'on voulait démontrer. $\square$

Remarque 3.48: La caractérisation séquentielle de la continuité est utile dans de multiples situations comme par exemple pour démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point ou pour transférer des résultats sur les suites vers les fonctions continues. On peut par exemple prouver grâce à cette proposition que les sommes, produits, quotients et composés de fonctions continues sont continues (pourvu que ces opérations aient un sens).

Elle a également une utilité pour prouver de nombreux résultats théoriques impliquant les fonctions continues comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires.

Le résultat suivant donne un critère de continuité en un point via les limites à gauche et à droite.

Proposition 3.49 (Continuité et limites à droite et à gauche): *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D_f$. On suppose que*

$$x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D_f} \quad et \quad x_0 \in \overline{]x_0, x_0 + 1[\cap D_f}.$$

Alors f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et sont égales à $f(x_0)$.

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si f continue en x_0 alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. En particulier on a pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f$ (qui est non vide par hypothèse) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ i.e. f admet une limite finie à gauche en x_0 valant $f(x_0)$: $f(x_0^-)$ existe et $f(x_0^-) = f(x_0)$. De même pour tout $x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f$ (qui est non vide par hypothèse) $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ i.e. f admet une limite finie à droite en x_0 valant $f(x_0)$: $f(x_0^+)$ existe et $f(x_0^+) = f(x_0)$. On a donc bien $f(x_0^+) = f(x_0^-)$.

($\Leftarrow$) Si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et sont égales à $f(x_0)$, alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_1, x_0[\cap D_f$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ et de plus il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0, x_0 + \eta_2[\cap D_f$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$, on a donc pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $x \neq x_0$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Or cette dernière inégalité est encore satisfaite lorsque $x = x_0$. D'où on a montré que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ainsi f est bien continue en x_0. □

Remarque 3.50: Il existe donc plusieurs situations différentes où une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ sera discontinue en $x_0 \in D_f$ satisfaisant

$$x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D_f} \quad \text{et} \quad x_0 \in \overline{]x_0, x_0 + 1[\cap D_f}.$$

- Le cas où f admet des limites à gauche à droite égales, mais ne valant pas $f(x_0)$. On pensera par exemple à la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(0) = 1$, ou encore à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valant $\frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.
- Le cas où f admet des limites à gauche et à droite en x_0, mais sont différentes. On pensera par exemple à la fonction partie entière en tout $k \in \mathbb{Z}$.
- La situation où la limite à gauche ou la limite à droite de f en x_0 n'existent pas. C'est le cas par exemple de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$ par exemple. En effet f n'admet pas de limite ni à gauche ni à droite en 0.

Il est possible d'étendre une fonction par continuité. Ceci est précisé dans la définition-proposition suivante.

Proposition 3.51 (Prolongement par continuité): *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que $x_0 \in \overline{D_f} \setminus D_f$. On dira que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0.*

Notons $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite. Alors en définissant $\tilde{f} : D_f \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in D_f \cup \{x_0\}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ \ell, & x = x_0, \end{cases}$$

on dit que $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en x_0. La fonction $\tilde{f}$ est alors nécessairement continue en x_0.

Démonstration. On a juste à démontrer que $\tilde{f}$ est continue en x_0, le reste étant des définitions. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell = \tilde{f}(x_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $|f(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$. Comme $x_0 \notin D_f$, on a donc par définition de $\tilde{f}$ que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, $f(x) = \tilde{f}(x)$, et donc finalement l'inégalité se réécrit $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon$. Cette dernière relation est encore satisfaite quand $x = x_0$, d'où on a montré que

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \underbrace{(D_f \cup \{x_0\})}_{= D_{\tilde{f}}}, \ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon.$$

La fonction $\tilde{f}$ est donc bien continue en x_0. □

Remarque 3.52: Souvent, par abus de notation, on peut être amené à identifier f avec son prolongement $\tilde{f}$. Dans ce cours on évitera autant que possible cette association frauduleuse.

On en déduit alors le résultat particulier suivant de prolongement par continuité utilisant en plus la notion de limite à gauche et limite à droite.

Proposition 3.53 (Prolongement par continuité - un cas particulier): *Soit $a < c < b$ trois réels. Si f est une fonction définie sur $]a, b[\setminus \{c\}$ telle que $f(c^-)$ et $f(c^+)$ existent et sont égales, alors la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in]a, b[\setminus \{c\}$ et $\tilde{f}(c) = f(c^-) = f(c^+)$ est le prolongement par continuité de f en c. La fonction $\tilde{f} :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue en c.*

Démonstration. Voir TD. □

Exemple 3.54: La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0, en définissant $f(0) = 0$. C'est la conséquence de l'Exemple 3.19.

3.3.2 Continuité sur un intervalle, Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 3.55 (Théorème des Valeurs Intermédiaires): *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Soient $a < b$ deux réels appartenant à I. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), il existe $x \in [a, b] \subset I$ tel que $y = f(x)$.*

Démonstration. Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $y \in [f(a), f(b)]$.

— Supposons d'abord que $y \in \{f(a), f(b)\}$, alors y admet bien un antécédent x par f dans $[a, b]$ (il suffit de prendre $x = a$ ou $x = b$) et la preuve est terminée.

— Supposons désormais que $y \notin \{f(a), f(b)\}$. Alors $f(a) < f(b)$ car sinon $f(a) = f(b)$ et comme $y \in [f(a), f(b)] = \{f(a)\}$, on obtient $y = f(a)(= f(b))$. On a donc

$$f(a) < y < f(b).$$

Soit l'ensemble

$$E = \{t \in [a,b] \,/\, f(t) \leqslant y\}\,. \tag{3.3.1}$$

L'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est non vide car $f(a) < y$ et donc $a \in E$. De plus E est majoré par b donc par le théorème d'existence de la borne supérieure, E admet une borne supérieure, que l'on note $x \in \mathbb{R}$. On a forcément $x \in [a,b]$, car $a \in E$ et x majorant de E donc $a \leqslant x$, puis b est un majorant de E et x est le plus petit majorant de E donc $x \leqslant b$.

Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x. Comme f est continue en $x \in [a,b]$, par le critère séquentielle de la continuité (Proposition 3.47), $f(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Par définition de E, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t_n) \leqslant y$, donc par passage à la limite dans l'inégalité il vient $f(x) \leqslant y$. Notons alors que nécessairement $x < b$ car sinon si $x = b$ alors $f(x) = f(b) > y \geqslant f(x)$, ce qui contredit le fait que $f(x) \leqslant y$.

Montrons l'autre inégalité $f(x) \geqslant y$. Supposons par l'absurde que $f(x) < y$.

Soit $\varepsilon = y - f(x) > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]x - \eta_0, x + \eta_0[\cap D_f$, $f(t) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Comme $x < b$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $x + \eta_1 < b$. Posons $\eta = \min(\eta_0, \eta_1) > 0$. On a alors $]x, x+\eta[\subset [a,b]$ et pour tout $t \in]x, x+\eta[$, $f(t) < f(x) + \varepsilon = f(y)$ [1]. On vient donc de prouver que $]x, x+\eta[\subset E$. Or comme x est un majorant de E, on obtient une contradiction. D'où $f(x) \geqslant y$.

On obtient finalement que $f(x) = y$, i.e. y admet un antécédent par f dans $[a,b]$.

Si $f(a) > f(b)$, considérons $y \in [f(b), f(a)]$. Posons $g = -f$ de sorte que g est continue sur I et $g(a) < -y < g(b)$. On peut alors reproduire le raisonnement précédent pour g et obtenir qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $-y = g(x)$, soit $y = f(x)$. □

Théorème 3.56 (TVI - formulation alternative): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $I \subset D_f$ où I est supposé être un intervalle. Si f est continue sur I, alors $f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}$ est un intervalle.*

On dit que l'image par une application continue d'un intervalle est un intervalle.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 3.55. Voir TD. □

Exemple 3.57: Tout polynôme de degré impair P a au moins une racine réelle. En effet, $x \mapsto P(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est positif) ou tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est négatif). Dans tous les cas, P prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. P étant continu, P s'annule nécessairement en au moins un point, par théorème des valeurs intermédiaires.

Une conséquence importante du Théorème des Valeurs Intermédiaires est le résultat suivant.

1. Notez que l'on aurait pu choisir ε plus petit que $y - f(x)$, par exemple $\frac{y-f(x)}{2}$, cela aurait aussi fonctionné.

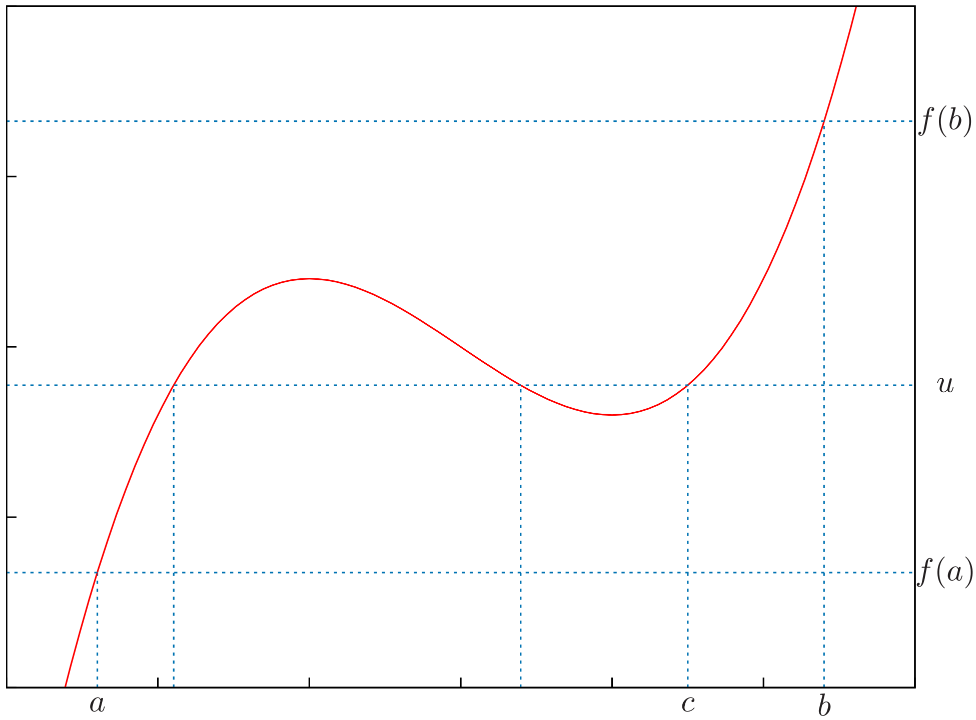


FIGURE 3.4 – Pour un $u \in [f(a), f(b)]$ donné, on voit nécessaire que f admet un antécédent puisqu'elle est continue. Il peut exister plusieurs $c \in]a, b[$ tels que $f(c) = u$. Parmi eux, le c que l'on cherche dans la démonstration du Théorème 3.55 est celui le plus à droite possible.

Théorème 3.58 (Théorème de la bijection): *Soit I un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est strictement monotone si et seulement si f est injective.*

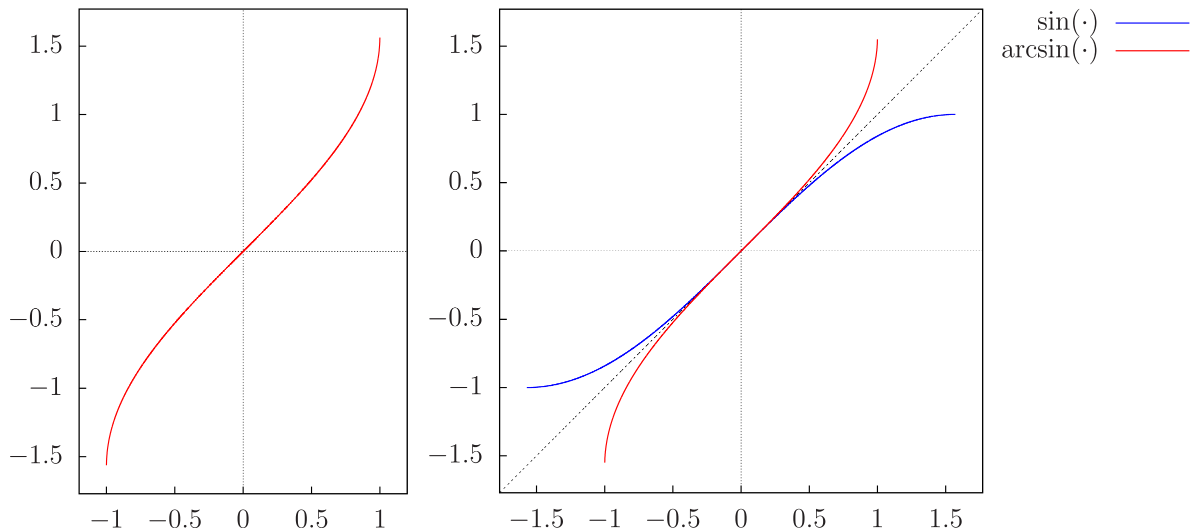
Si l'une de ces deux conditions équivalentes est satisfaite alors $f : I \to f(I)$ est une bijection et sa fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est nécessairement continue. On dit alors que f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Démonstration. Admis. Voir TD pour la première équivalence. □

Remarque 3.59: Une fonction strictement monotone est automatiquement injective et donc bijective sur son image. La fonction réciproque est ainsi bien définie. Cependant une fonction injective n'est pas nécessairement strictement monotone. Mais la réciproque est vraie quand la fonction est continue. Voir TD.

Remarque 3.60: Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par la symétrie d'axe la première bissectrice $y = x$.

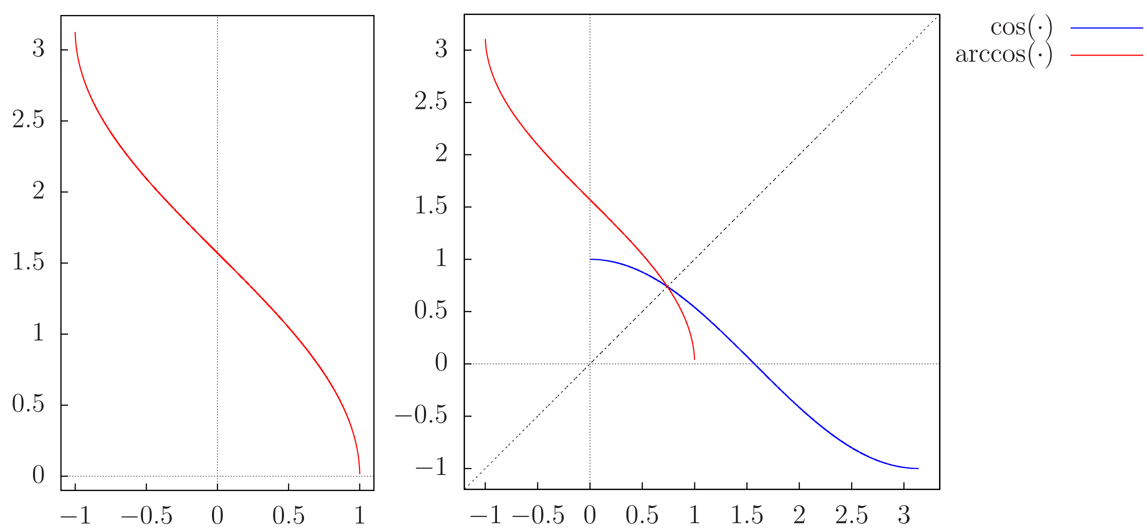
Exemple 3.61:
— La fonction sin est une fonction continue strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Par conséquent, d'après le théorème 3.58, c'est un homéomorphisme : sa fonction réciproque, notée arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Voir Figure 3.5), est continue.
— La fonction cos est un homéomorphisme strictement décroissant de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est notée arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ (Voir Figure 3.6).
— La fonction tan est un homéomorphisme strictement croissant de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (Voir Figure 3.7).



(a) Fonction arcsin

(b) Le graphe de la fonction arcsin se déduit de celui de la restriction de la fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.5 – Fonctions sin et arcsin.



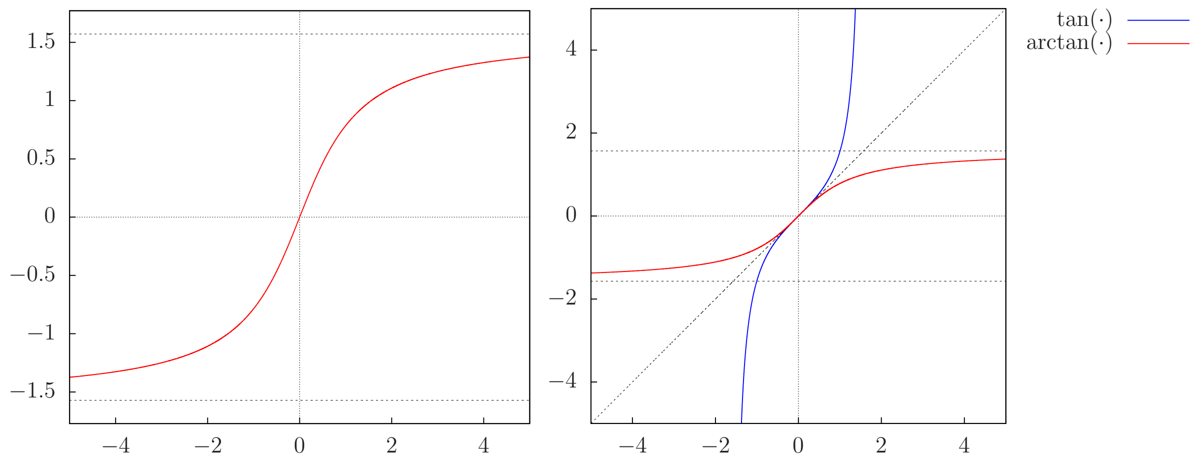
(a) Fonction arccos

(b) Le graphe de la fonction arccos se déduit de celui de la restriction de la fonction cos sur $[0, \pi]$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.6 – Fonctions cos et arccos.

3.3.3 Continuité sur un segment

Un autre résultat fondamental concernant les fonctions continues est le suivant.



(a) Fonction arctan

(b) Le graphe de la fonction arctan se déduit de celui de la restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.7 – Fonctions tan et arctan.

Théorème 3.62: *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$.*

Démonstration. On va montrer uniquement qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant M$ et qu'il existe $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = M$. Pour m, la preuve est similaire et laissée à titre d'entraînement / exercice.

Si f n'est pas majorée, alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$ telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Mais comme, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée (incluse dans $[a, b]$), par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. La fonction f étant continue, par le critère séquentielle de la continuité (Proposition 3.47), $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également. Ceci est contradictoire avec le fait que $(f(x_n))_{n\to+\infty}$ tend vers $+\infty$. D'où f est majorée.

Posons $A = \{f(x) \,/\, x \in [a, b]\}$. C'est un ensemble non vide et majorée (comme f majorée), par la propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure. Notons $M = \sup(A)$. Comme M est un majorant de A, on a pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant M$. Par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$ telle que $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M. Or $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge, par le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ et φ une extractrice telle que $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers d. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant t_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient $d \in [a, b]$. Or f est continue en $d \in [a, b]$, donc par le critère séquentielle de la continuité, on déduit que $(f(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(d)$. Enfin comme $f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, c'est aussi le cas de sa sous-suite $(f(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, on obtient donc $f(d) = M$. □

Théorème 3.63 (Image continue d'un segment): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $[a, b] \subset D_f$, avec $a \leqslant b$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Alors $f([a, b])$ est un segment.*

On dit que l'image par une fonction continue d'un segment est un segment.

Démonstration. D'après le théorème 3.62, $c, d \in [a,b]$ tels que $f([a,b]) \subset [f(c), f(d)]$. Montrons l'autre inclusion.

Soit $y \in [f(c), f(d)]$. Comme f est continue sur $[a,b]$ donc sur $[c,d] \subset [a,b]$ (ou $[d,c]$ en fonction de si $c \leqslant d$ ou $d \leqslant c$), il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires, $x \in [c,d] \subset [a,b]$ (ou $[d,c]$) tel que $f(x) = y$. D'où $y \in f([a,b])$. Ainsi $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$. □

Remarque 3.64: Le Théorème 3.62 n'est plus vrai sur un intervalle qui n'est pas un segment. Par exemple la fonction tan n'est pas bornée sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.4 Continuité uniforme

Motivons le paragraphe qui vient. Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est continue sur D_f alors c'est dire que f est continue en tout $x_1 \in D_f$, c'est-à-dire :

$$\forall x_1 \in D_f,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_1 - \eta, x_1 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Dans cette définition, η dépend non seulement de ε, mais aussi de x_1. Par conséquent si on change la valeur de $x_1 \in D_f$ en lequel on regarde la continuité, la taille du voisinage de x_1 dans la définition (i.e. la valeur de η), sur lequel $f(x) \in]f(x_1) - \varepsilon, f(x_1) + \varepsilon[$, change également.

Prenons un exemple pour illustrer ce phénomène : soit la fonction dont le graphe est tracé en Figure 3.8. Essayons de quantifier la continuité de f aux points x_1 et x_2. Considérons pour cela deux intervalles centrés autour de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ de longueur identique 2ε et quantifions pour chaque point x_1 et x_2 le $\eta_i > 0$ maximal pour lequel la relation (3.4.1) est vérifiée.

Sur un voisinage de x_1, la fonction f est plus ou moins constante. Ainsi, la contrainte $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ est vérifiée pour x dans un intervalle $]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[$ relativement grand. A l'inverse, la fonction a une pente importante au voisinage de x_2 : la contrainte $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$ est vérifiée sur un intervalle $]x_2 - \eta_2, x_2 + \eta_2[$ visiblement plus petit.

Autrement dit, le $\eta_1 > 0$ qui convenait pour la relation (3.4.1) au point x_1 ne convient manifestement plus pour (3.4.1) au point x_2.

L'idée derrière la continuité uniforme est alors de renforcer la définition de la continuité de f sur D_f en imposant qu'il est possible de trouver une taille de voisinage commune ou *uniforme* (i.e. pour tous les $x_1 \in D_f$) sur lequel $f(x) \in]f(x_1) - \varepsilon, f(x_1) + \varepsilon[$. Pour atteindre cet objectif, il suffit d'échanger l'ordre des quantificateurs $\forall x_1 \in D_f$ avec $\exists \eta > 0$ dans la définition 3.4.1.

3.4.1 Définitions

Définition 3.65: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur D_f si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_0 \in D_f, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f,\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3.4.2}$$

Cette définition se réécrit de manière équivalente

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, x') \in D_f^2, |x - x'| < \eta,\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{3.4.3}$$

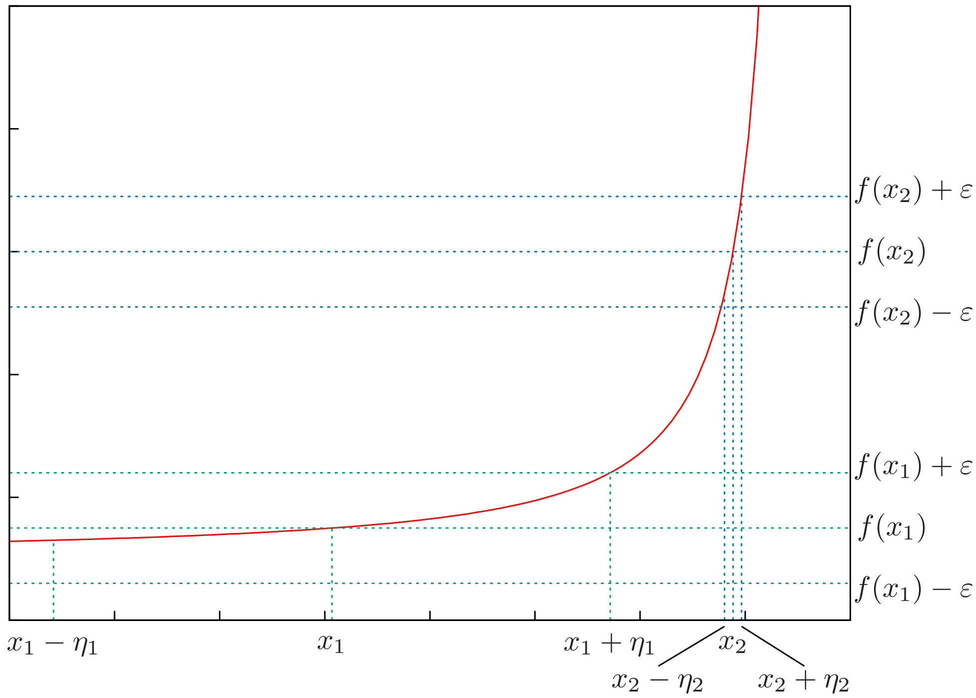


FIGURE 3.8 – La fonction f est continue aux points x_1 et x_2 mais le paramètre $\eta > 0$ dans (3.4.1) dépend a priori du point où on étudie la continuité.

Exemple 3.66: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1,+\infty[$. En effet soit $\varepsilon > 0$, posons $\eta = 2\varepsilon > 0$, alors pour tout $x, y \geqslant 1$ tels que $|x - x'| < \eta$, on a

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \leqslant \frac{|x - x'|}{2} < \varepsilon,$$

car $\sqrt{x} + \sqrt{x'} \geqslant \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.

Qualitativement, comme nous avons renforcé la définition de la continuité pour obtenir celle de la continuité uniforme, il est assez naturel d'obtenir qu'une fonction uniformément continue soit continue. C'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Proposition 3.67: *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Plus précisément, soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur D_f. Alors f est continue sur D_f.

Démonstration. La preuve est essentiellement un jeu de réécriture, qui reste néanmoins un très bon exercice (c'est important de "faire ses gammes").

Soit $x_0 \in D_f$. Il suffit de montrer que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe par hypothèse $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, x') \in D_f^2$, on ait $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Choisissons $x' = x_0$ de sorte que $x' \in D_f$. Alors d'après ce qui précéde, pour tout $x \in D_f$ tel que $|x - x'| < \eta$, c'est-à-dire pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. On a bien prouvé que f est continue en x_0. $\square$

La question naturelle est de savoir si la réciproque de la Proposition 3.67 est vraie. A la lumière du paragraphe motivant cette partie, on se dit que (par exemple) une fonction dont la pente explose aura peu de chance d'être uniformément continue. La proposition suivante confirme que la réciproque n'est pas satisfaite *en général.*

Proposition 3.68: *La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Voir TD. □

3.4.2 Uniforme continuité et fonctions continues sur un segment

Il s'avère que la réciproque à la Proposition 3.67 est vraie dans le cas où la fonction continue considérée est restreinte à un segment.

Théorème 3.69 (Théorème de Heine): *Soit $a \leqslant b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Alors f est uniformément continue sur [a,b].*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a,b]$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, x' \in [a,b]$ tels que $|x - x'| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors pour $\eta = \frac{1}{n+1}$, il existe $x_n, x'_n \in [a,b]$ tels que $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Comme $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a,b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x'_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a \leqslant x'_{\varphi(n)} \leqslant b$, par passage à la limite dans ces inégalités, on déduit que $\ell \in [a,b]$.

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x_{\varphi(n)} - \ell| &= |x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)} + x'_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant |x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)}| + |x'_{\varphi(n)} - \ell|, \\ &\leqslant \frac{1}{\varphi(n)+1} + |x'_{\varphi(n)} - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1} + |x'_{\varphi(n)} - \ell|, \end{aligned}$$

Ainsi par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient alors que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

De plus, comme f est continue en $\ell \in [a,b]$, par la caractérisation séquentielle de la continuité, les suites $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\Big(f(x'_{\varphi(n)})\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite $f(\ell)$. Par conséquent $|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui entre en contradiction avec $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc f est bien uniformément continue sur $[a,b]$. □

Remarque 3.70: Par ce théorème, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$ (car continue sur $[0,1]$). Comme elle est uniformément continue sur $[1,+\infty[$, elle est en fait uniformément continue sur $[0,+\infty[$ tout entier.

3.4.3 Fonctions lipschitziennes

Définition 3.71: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$. On dit que f est lipschitzienne de rapport λ ou λ-lipschitzienne si*

$$\forall x, y \in D_f,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|. \tag{3.4.4}$$

Exemple 3.72: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$: pour tout $x, y \geqslant 1$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$. Par contre, elle n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$: si tel était le cas, il existerait un $\lambda \geqslant 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \lambda|x - y|$. Et donc en particulier pour $y = 0$ et $x \neq 0$ on aurait $\sqrt{x} \leqslant \lambda x$ et donc $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \lambda$, ce qui est absurde car $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Proposition 3.73: *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Voir TD. □

Remarque 3.74: Il existe des fonctions uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes (cf. $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$).

Chapitre 4

Dérivabilité

Le but de ce chapitre est de revenir sur la notion de dérivabilité et les théorèmes usuels (théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis, formules de Taylor) qui s'y rapportent.

Dans tout le chapitre, on notera

I un intervalle contenant au moins deux points distincts.

Ainsi si $a \in I$, alors $I \setminus \{a\}$ est non vide et comme I est un intervalle, $a \in \overline{I \setminus \{a\}}$. Ainsi on peut "s'approcher" de a en restant dans $I \setminus \{a\}$.

4.1 Définitions et rappels de propriétés

On se contente ici de rappels succincts sur la notion de dérivabilité ainsi que les règles et propriétés usuelles.

4.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 4.1 (Dérivabilité): *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction $\tau_{a,f} : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définissant le taux d'accroissement de f en a*

$$\tau_{a,f} : x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{4.1.1}$$

admet une limite finie en a. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite, que l'on appelle nombre dérivée de f en a.

Définition 4.2 (Dérivabilité à gauche): *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que $a \in \overline{]a-1, a[\cap I}$.*

On dit que f est dérivable à gauche en a si la fonction $\tau_{a,f}$ définie en (4.1.1) admet une limite finie à gauche en a. On note alors $f'_g(a)$ cette limite, que l'on appelle nombre dérivée à gauche de f en a.

Définition 4.3 (Dérivabilité à droite): *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que $a \in \overline{]a, a+1[\cap I}$.*

On dit que f est dérivable à droite en a si la fonction $\tau_{a,f}$ définie en (4.1.1) admet une limite finie à droite en a. On note alors $f'_d(a)$ cette limite, que l'on appelle nombre dérivée à droite de f en a.

Remarque 4.4: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$. Dire que f est dérivable en a est équivalent à dire que f est dérivable à droite en a. En effet remarquons que

— tout d'abord il est légitime de considérer la question de la dérivabilité de f en a puisque cela revient à se demander si $\tau_{a,f} : D_\tau \to \mathbb{R}$, où $D_\tau =]a, b]$ est le domaine de définition de $\tau_{a,f}$, admet une limite finie en a qui est bien adhérent à $\overline{D_\tau}$,

— de même comme $a \in \overline{]a, a+1[\cap D_\tau}$, il est donc également légitime de considérer la limite à droite de $\tau_{a,f}$ en a et donc la dérivabilité à droite de f en a,

— enfin pour tout $\eta > 0$, $]a-\eta, a+\eta[\cap D_\tau =]a, a+\eta[\cap D_\tau$, comme $D_\tau =]a, b]$, donc les définitions de la limite en a et de la limite à droite en a de $\tau_{a,f}$ sont identiques.

De même, dire que f est dérivable en b, c'est dire de manière équivalente que f est dérivable à gauche en b.

Proposition 4.5: *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que*

$$a \in \overline{]a-1, a[\cap I} \quad \text{et} \quad a \in \overline{]a, a+1[\cap I}.$$

On a alors l'équivalence entre

1. f est dérivable en a,

2. f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f_d(a)$.

Démonstration. La preuve est similaire à la démonstration du résultat affirmant l'équivalence entre la continuité en x_0 d'une fonction f et l'existence pour f de limite à gauche et à droite égales à $f(x_0)$. □

Exemple 4.6: — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\tau_{a,f}(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k},$$

ainsi $\tau_{a,f}$ admet une limite finie en a qui vaut na^{n-1}, donc f est dérivable en a et $f'(a) = na^{n-1}$.

— La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est dérivable à droite en 0 car pour tout $x > 0$, $\tau_{0,f}(x) = 1$ donc $\tau_{0,f}$ admet une limite à droite en 0 valant 1. On en particulier $f'_d(0) = 1$. De même la fonction f est également dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$. Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0.

— La fonction $f : x \in \mathbb{R}_+$ est dérivable à droite en 0, mais également dérivable en 0 (c'est la même chose ici comme $D_f = [0, +\infty[$).

— Soit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 + 1, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

On montre sans difficulté que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x$. Par contre la fonction f n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas continue en 0 (voir ci-dessous pour ce rappel). De manière plus élémentaire en retournant à la définition, comme $f(0) = 1$, la fonction $\tau_{0,f} : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{f(x)-1}{x}$ n'admet pas de limite finie en 0 car elle admet $+\infty$ comme limite à gauche en 0 puisque pour tout $x < 0$, $\tau_{0,f}(x) = \frac{x^2-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$.

On vient de démontrer que f n'est pas dérivable à gauche en 0 (par contre elle l'est à droite en 0). Donc de nouveau le fait que f n'est pas dérivable en a est bien cohérent avec la CNS de la Proposition 4.5. Cela peut paraître surprenant quand on observe le graphe de la fonction f puisque on a l'impression que f admet une tangente horizontale à gauche en 0 donc devrait être dérivable à gauche en 0. Mais cette observation vient du fait que $f'(x) = 2x \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} 0$, ce qui n'est pas la même chose que de dire que f est dérivable à droite en 0.

On rappelle sans démonstration les résultats suivants.

Proposition 4.7: *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.*

1. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. La réciproque est fausse.

2. Si f est dérivable en a, alors $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o_{x\to a}(x-a)$. Réciproquement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a i.e. il existe $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o_{x\to a}(x-a)$, alors f est dérivable en a et $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$.

3. S'il existe V un voisinage de a tel que $V \subset I$, ou de manière équivalente il existe $\eta > 0$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$, et si f a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse : contre-exemple $x \mapsto x^3$ en 0.

4.1.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition 4.8: *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. Si f est dérivable en tout $a \in I$, alors on dit que f est dérivable sur I. On note $f' : a \in I \mapsto f'(a)$ la fonction dérivée de f. L'ensemble des fonctions dérivable sur I est noté $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

2. Si f est dérivable sur I et de dérivée continue sur I, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, ou est continûment différentiable sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

3. Plus généralement, on pose $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$. On suppose que pour un $k \geqslant 1$, $f^{(k-1)}$ est bien définie sur I. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable en un point a de I, le nombre dérivée $\left(f^{(k-1)}\right)'(a)$ est noté $f^{(k)}(a)$ et dite la dérivée k-ième de f en a. Si de plus $f^{(k-1)}$ est dérivable en tout point a de I, on dira que f est k fois dérivable sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$.

4. Si f est k-fois dérivable sur I et de dérivée k-ième continue, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, ou est k-fois continûment différentiable sur I. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

5. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \geqslant 1$. L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Remarque 4.9: On a les inclusions suivantes pour tout $k \geqslant 1$

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}). \tag{4.1.2}$$

Exemple 4.10: Les fonctions usuelles (polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques, hyperboliques) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition.

Remarque 4.11: Comme nous l'avons vu, toute fonction dérivable en a est continue en a, mais la réciproque est fausse ! Nous avons étudié plus tôt l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Vous verrez plus tard qu'il existe des fonctions (et même une infinité de telles fonctions [1]) qui sont continues sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$! Des exemples célèbres en sont la fonction de Weierstrass [2] ou le mouvement Brownien [3].

Remarque 4.12: Les inclusions de la Remarque 4.9 sont strictes : il existe par exemple des fonctions dans $\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais qui ne sont pas dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, autrement dit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et } 0 \text{ si } x = 0. \tag{4.1.3}$$

4.1.3 Dérivation et somme, produit et composition

On rappelle sans démonstration que les somme, produit, quotient (sous réserve de dénominateur non nul), composée de fonctions dérivables sont dérivables. Plus précisément, pour toutes fonctions f et g, n fois dérivables sur leur ensemble de définition, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

— la fonction $\lambda f + g$ est n fois dérivable, et on a $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$ (la dérivation est linéaire),

— le produit fg est n fois dérivable et on a

$$\text{Formule de Leibniz :} \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{4.1.4}$$

La formule de Leibniz se prouve aisément par récurrence en utilisant que $(fg)' = f'g + fg'$ et l'identité bien connue $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

— La fonction $f \circ g$ est n fois dérivable (pourvu bien sûr que $f \circ g$ ait un sens). Il existe une formule pour la dérivée n-ième de la composée (Formule de Faà di Bruno), mais il faut surtout connaître (et savoir redémontrer !) que

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g',$$

où le "$\cdot$" symbolise ici le produit.

4.1.4 Dérivation d'une fonction réciproque

Proposition 4.13 (Dérivation de la réciproque): *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et injective sur I. Pour tout $a \in I$ tel que $f'(a) \neq 0$, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{4.1.5}$$

En particulier, si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{4.1.6}$$

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_continue_nulle_part_dérivable`
2. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass`
3. `https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process`

Démonstration. D'après le Théorème 3.58, on sait que $g = f^{-1}$ est continue en b (et même, par injectivité de g, quand $y \to b$ avec $y \neq b$, alors $g(y) \to g(b)$ avec $g(y) \neq g(b) = a$). Par hypothèse, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a, x \neq a]{} f'(a)$. Par composition des limites, $\frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a} \xrightarrow[y \to b, y \neq b]{} f'(a)$. C'est exactement dire que $\frac{y-b}{g(y)-g(b)} \xrightarrow[y \to b, y \neq b]{} f'(a)$. Comme $f'(a) \neq 0$, l'inverse du quotient précédent converge aussi : $\frac{g(y)-g(b)}{y-b} \xrightarrow[y \to b, y \neq b]{} \frac{1}{f'(a)}$. □

Exemple 4.14: Cet exemple est la suite de l'Exemple 3.61 : les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ de dérivées respectives :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{et } \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.1.7}$$

Remarque 4.15: Une façon de retrouver heuristiquement la formule (4.1.6) (mais pas de la prouver[4] !) est d'appliquer la formule de dérivée d'une fonction composée : on a $g(f(x)) = x$, donc par dérivation, $g'(f(x))f'(x) = 1$ et donc $g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

4.2 Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Dans toute cette section, on suppose que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Théorème 4.16 (Théorème de Rolle): *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f est continue sur $[a,b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a,b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe (au moins un) $c \in]a,b[$ vérifiant $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante, alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a,b[$. Supposons f non constante. Alors f est continue sur $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $c, d \in [a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$. Comme f est non constante, on a nécessairement $f(c) < f(d)$. Supposons par l'absurde que $c \in \{a,b\}$ et $d \in \{a,b\}$. Alors comme $f(a) = f(b)$, on a $f(c) = f(d)$. Contradiction. Donc on a $c \notin \{a,b\}$ ou $d \notin \{a,b\}$.

Supposons que $c \in]a,b[$. Comme f est dérivable en c, qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]c-\eta, c+\eta[\subset [a,b]$ et que m est un minimum global de f, donc un extremum local de f, alors on a $f'(c) = 0$.

Le cas $d \in]a,b[$ se traite de la même manière. □

Corollaire 4.17: *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant*

1. *f continue sur $[a,b]$,*
2. *f dérivable en tout point de $]a,b[$,*

alors entre deux zéros distincts de f il existe au moins un zéro de f'. Dit plus précisément, s'il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = 0$, alors il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(x) = 0$.

4. On ne peut dériver la fonction $g = f^{-1}$ si on ne sait pas au préalable que g est dérivable.

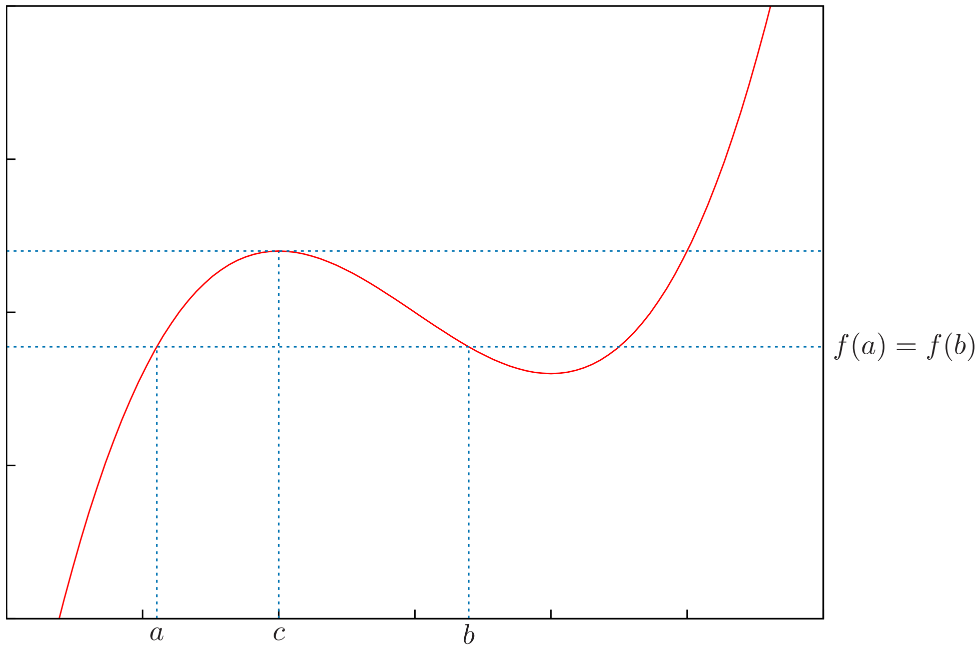


FIGURE 4.1 – Illustration du théorème de Rolle. Comme $f(a) = f(b)$ et que f est continue sur $[a, b]$, il existe au un moins point intérieur à $[a, b]$ en lequel f atteint son maximum ou son minimum. Comme f est dérivable en ce point (par hypothèse), nécessairement f admet en ce point une tangente nulle. Il est bien sûr possible d'avoir plusieurs c tels que $f'(c) = 0$ entre a et b.

Démonstration. La fonction restreinte $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[\subset]a, b[$. Comme $f(x_1) = f(x_2)$, par le théorème de Rolle, il existe $x \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(x) = 0$. $\square$

Le théorème de Rolle permet de montrer un résultat similaire dans le cas où la fonction f ne satisfait plus forcément $f(a) = f(b)$. La conclusion est alors qu'il existe une tangente à f qui a la même pente que la pente moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. C'est le théorème des accroissements finis.

Théorème 4.18 (Théorème des accroissements finis): *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$*

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Démonstration. L'idée de la preuve est de se ramener, à partir de f, au cas d'une fonction qui prend des valeurs identiques en a et b. La manière la plus simple de réaliser ceci est de retrancher à f la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Soit donc $\phi : x \in [a, b] \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)\right)$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus pour tout $x \in]a, b[$, on a $\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Comme $\phi(a) = \phi(b) (= 0)$ (on a tout fait pour !), on peut appliquer le théorème de Rolle qui donne l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. D'où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Remarque 4.19: Dans la preuve, on aurait pu tout à fait également définir ϕ en retranchant simplement la droite de pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et valant 0 en 0 (donc sans le $f(a)$). On aurait alors eu $\phi(a) = \phi(b) = f(a)$.

Du théorème des accroissements finis, aussi appelé égalité des accroissement finis, on peut déduire l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 4.20 (Inégalité des accroissements finis): *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$.*

S'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant K$, alors pour tout $x, x' \in [a, b]$, on a $|f(x) - f(x')| \leqslant K|x - x'|$.

En particulier, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b - a|$.

Terminons cette section par un résultat qui énonce qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est nécessairement constante. Ce résultat est également une conséquence du théorème des accroissements finis.

Proposition 4.21: *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. On sait qu'une fonction constante et dérivable sur son domaine de définition est nécessairement de dérivée nulle (le taux d'accroissement est nul).

Réciproquement si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $f' = 0$, alors pour $x, x' \in I$, $x \leqslant x'$, comme I est un intervalle, on a $[x, x'] \subset I$. Et comme f est continue sur $[x, x']$, dérivable sur $]x, x'[$ et pour tout $t \in]x, x'[$, $|f'(t)| \leqslant 0$, par l'inégalité des accroissements finis, on obtient $|f(x) - f(x')| = 0$. On a donc montré que pour tout $x, x' \in I$, $f(x) = f(x')$ i.e. f est constante. □

Remarque 4.22: Pour la réciproque, il est fondamental que I soit un intervalle. La fonction f définie sur $[0, 1] \cup [2, 3]$ valent 0 sur $[0, 1]$ et 1 sur $[2, 3]$ est dérivable sur son domaine de définition, de dérivée nulle, mais n'est pas constante (puisque $f(0) \neq f(2)$).

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 Théorème fondamental de l'analyse

Le résultat suivant est fondamental en analyse : il relie intégrale et dérivée.

Théorème 4.23 (Théorème fondamental de l'analyse): *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons*

$$F : x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap[a,b]$, on a $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap[a,b]$

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x_0)-(x-x_0)f(x_0)| &= \left|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\mathrm{d}t\right|,\\ &\leqslant \left|\int_{x_0}^{x}|f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right|,\\ &\leqslant \varepsilon|x-x_0|.\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap[a,b]$, $x \neq x_0$

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \varepsilon.$$

On vient donc de montrer que $\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, c'est-à-dire F est dérivable en x_0, de dérivée $F'(x_0) = f(x_0)$. Comme $x_0 \in [a,b]$ est quelconque, F est donc dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Comme f est continue sur $[a,b]$, F' l'est aussi, d'où F est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. □

Corollaire 4.24: *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $[a,b]$, i.e. F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Alors*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration. Posons $\tilde{F} : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Alors d'après le Théorème 4.23, $\tilde{F}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\tilde{F}' = f$. On a donc $(F-\tilde{F})' = F' - \tilde{F}' = f - f = 0$. Ainsi $F - \tilde{F}$ est constante sur le segment $[a,b]$, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F = \tilde{F} + c$.

On a donc $F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) + c - \tilde{F}(a) - c = \tilde{F}(b) = \int_a^b f(t)dt$. □

Corollaire 4.25: *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Comme f est une primitive de f' continue sur $[a,b]$, car f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, d'après le Corollaire 4.24, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f(t)dt$. □

4.3.2 Formules de Taylor

L'idée des formules de Taylor est la suivante : étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I et a un point intérieur à I, on souhaite approcher f au voisinage de a par une fonction plus simple [5]. La classe de fonctions choisie ici est celle des fonctions polynomiales. Cette notion

5. La notion de fonction plus simple est arbitraire : dans ce chapitre, l'idée est d'approcher une fonction f par des polynômes, qu'on estime plus faciles à manipuler que la fonction elle-même. Cette idée d'approcher une fonction f par une fonction plus simple est un principe très général qu'on retrouve à de multiples reprises en analyse selon le contexte et l'utilisation qu'on en fait. Par exemple, la construction de l'intégrale de Riemann repose sur le fait qu'on peut approcher une fonction continue par des fonctions constantes par morceaux (voir votre cours de L1). Autre exemple : le principe des séries de Fourier (que vous verrez plus tard) est d'approcher une fonction f 2π-périodique par les fonctions élémentaires $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$.

est très naturelle si on pense à la notion de dérivée : nous avons vu que si f est dérivable au point x_0, alors nous avons le développement limité suivant, valable au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x \to x_0}(x - x_0). \tag{4.3.1}$$

Ainsi, nous venons d'approcher f par le polynôme de degré 1 $x \mapsto f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, modulo un terme d'erreur. L'idée générale des formules de Taylor est de poursuivre cette approximation : peut-on approcher f par un polynôme de degré 2, 3, etc. et peut-on quantifier l'erreur commise dans cette approximation ? La réponse est positive, pour peu que f soit suffisamment régulière au voisinage de x_0.

Définition 4.26: *Soit $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle I et soit x_0 un point intérieur à I. On suppose que f est n-fois dérivable en x_0. On définit le polynôme de Taylor de degré n de la fonction f au point x_0, comme la fonction*

$$x \mapsto P_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{4.3.2}$$

Exemple 4.27: Ainsi, les premiers polynômes de Taylor d'une fonction f (suffisamment dérivable au point x_0) sont :

$$\begin{aligned}
&P_0^{f,x_0}(x) = f(x_0) \text{ (polynôme constant, de degré 0)},\\
&P_1^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ (fonction affine, c'est la tangente à } f \text{ en } x_0),\\
&P_2^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \text{ (polynôme du second degré)},\\
&P_3^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.
\end{aligned}$$

Remarque 4.28: L'approximation d'une fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 n'a d'intérêt qu'au voisinage de x_0, c'est-à-dire sur un petit intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, pour $\varepsilon > 0$.

Exercice 4.29: Calculer l'expression explicite des premiers polynômes de Taylor au point $x_0 = 1$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x}{(1+x)^2+1} + \frac{1}{2}$ donnée en Figure 4.2.

Les formules de Taylor donnent une expression de l'erreur commise quand on remplace la fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n. La première formule de Taylor est la formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 4.30 (Formule de Taylor avec reste intégral): *Soit I un intervalle, $n \geqslant 1$, $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I. On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors on a, pour $x \in I$,*

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u. \tag{4.3.3}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, cela résume à écrire, pour f de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(u)\mathrm{d}u,$$

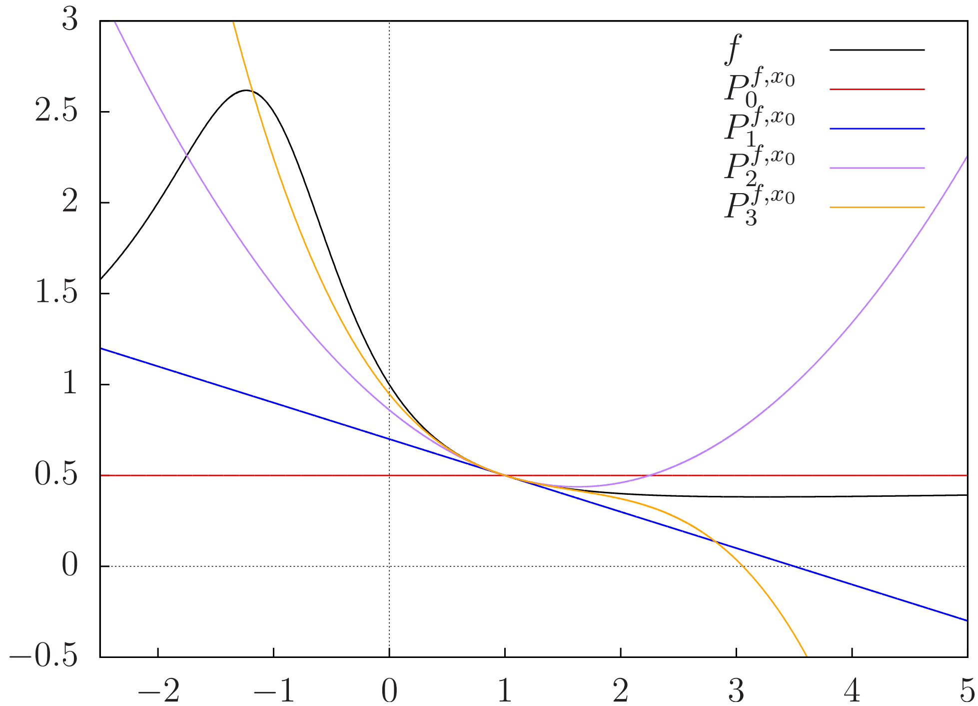


FIGURE 4.2 – Les 4 premiers polynômes de Taylor P_n^{f,x_0} $(n = 0, \dots, 3)$ correspondant à la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x}{(1+x)^2+1} + \frac{1}{2}$ au point $x_0 = 1$.

ce qui est exactement le Corollaire 4.25. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit maintenant f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. Alors en particulier, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et donc par hypothèse de récurrence

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u.$$

Intégrons par parties le reste :

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u &= \left[-\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) \right]_{u=x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u, \\
&= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u, \\
&= P_{n+1}^{f,x_0}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

D'où la propriété par récurrence. □

Théorème 4.31 (Formule de Taylor-Lagrange): *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et dont la dérivée n-ième est dérivable sur I. Alors pour tout $x_0, x \in I$, il* *existe* $c \in]x_0, x[$ *tel que*

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.3.4}$$

Démonstration. C'est une application du théorème de Rolle. Voir TD. □

Remarque 4.32: Il est possible de donner un énoncé un peu plus précis de cette formule de Taylor-Lagrange. En effet, comme on applique le théorème de Rolle, la dérivabilité n'est nécessaire que sur l'intérieur de l'intervalle. On peut donc par exemple énoncer que pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$, on a pour tout $x_0, x \in [a, b]$, l'existence de $c \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{4.3.5}$$

Théorème 4.33 (Formule de Taylor-Young): *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, x_0 *un point intérieur à* I *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *dont on suppose qu'elle admet une dérivée d'ordre* n *au point* x_0. *Alors, pour* $x \in I$

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x), \tag{4.3.6}$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Démonstration. La preuve utilise le théorème des accroissements finis généralisés. Voir TD. □