CHAP 2 : SUITES RÉELLES ET COMPLEXES

$\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. PREMIÈRES DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Définition. *On appelle suite toute application u de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$:*

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$$
$$n \mapsto u(n)$$

On note $u_n = u(n)$ le terme général de la suite u et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'image de $\mathbb{N}$ par u*

$$u(\mathbb{N}) := \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$$

est l'ensemble des valeurs prises par u. C'est l'ensemble des termes de la suite, noté parfois $\operatorname{Im} u$.

Remarque. *Il s'agit de faire la distinction entre plusieurs objets distincts :*
- *La suite u (encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou bien $(u_n)_{n\geqslant 0}$) qui est une application.*
- *L'élément de la suite u_n (pour n fixé) qui est un élément de $\mathbb{K}$.*
- *$u(\mathbb{N})$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{K}$, l'ensemble des valeurs prises par u.*

Remarque. *Une suite peut être définie sur un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$: par exemple, définissons la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 100}$ par $u_n = \ln(n-99)$ pour $n \geqslant 100$. Son image est $\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 100\}$.*

Exemple(s). *Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $u(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$.*

Définition. *Soient deux suites u et v éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les suites*
◇ $u+v$ par $(u+v)_n := u_n + v_n$, $n \geqslant 0$,
◇ λu par $(\lambda u)_n := \lambda u_n$, $n \geqslant 0$,
◇ uv par $(uv)_n := u_n v_n$, $n \geqslant 0$.

Proposition 1. $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.* $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

Preuve : On rappelle que $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $u, v, w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a

$$u + v = v + u \quad \text{et} \quad (u+v)+w = u+(v+w)$$

donc la loi interne $+$ est commutative et associative. La suite constante égale à 0 est son élément neutre et toute suite admet une suite opposée (pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $-u = (-1)\cdot u = (-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
La multiplication externe $\cdot$ admet 1 pour élément neutre ($1 \cdot u = u$) et est distributive : pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda \cdot (u+v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v) \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu)\cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)\,.$$

Enfin, elle est associative : $(\lambda\mu)\cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$.
$(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est donc bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
De plus, la multiplication interne est distributive :

$$(u+v)\times w = u \times w + v \times w \quad \text{et} \quad u \times (v+w) = u\times v + u \times w\,.$$

Enfin, $(\lambda u)\times(\mu v) = (\lambda\mu)\cdot(u \times v)$.
On en déduit que $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \times, \cdot)$ est bien une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition. *Si P est une propriété sur l'ensemble des suites (par exemple "être une suite positive"), on dira qu'une suite u vérifie la propriété P*à partir d'un certain rang *(en abrégé APCR) s'il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que la suite restreinte $(u_n)_{n\geqslant N}$ vérifie la propriété P.*

Exemple(s). *1. u est positive à partir d'un certain rang s'il existe $N \geqslant 0$, tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant 0$.*

2. La suite définie par $u_n = n-3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est positive à partir du rang $N=3$.

3. Si u est positive, alors u est positive à partir d'un certain rang.

4. $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas positive à partir d'un certain rang.

5. Les critères de comparaison pour les séries sont des critères APCR sur les termes des séries.

Exemple(s). *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par la relation $u_{n+1} = u_n + 2$. Alors u est positive APCR.*
En effet, par récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 2n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant -\frac{u_0}{2}$, $u_n \geqslant 0$.
Cherchons le plus petit rang à partir duquel u est positive. On a l'encadrement entier :

$$E(-\frac{u_0}{2}) \leqslant -\frac{u_0}{2} < E(-\frac{u_0}{2}) + 1\,.$$

Si $u_0 \geqslant 0$, u est positive (à partir du rang $N=0$). Sinon, si u_0 est un entier pair, $E(-\frac{u_0}{2}) = -\frac{u_0}{2}$ et u est positive à partir du rang $N = -\frac{u_0}{2}$ et si u_0 n'est pas un entier pair, en posant $N = 1 + E(-\frac{u_0}{2})$, u est positive à partir du rang N.

Cas particuliers de propriété APCR :

Définition. *1. Une suite u est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. s'il existe $c \in \mathbb{K}$ et $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = c$.*

2. Une suite u est dite presque nulle si elle est nulle à partir d'un certain rang.

Exemple(s). *1. La suite u définie par $u_n = \min(n, 30)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est stationnaire (elle est constante à partir du rang 30).*

2. Dans les exercices complémentaires, on vous proposera de montrer que toute suite $u \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ à valeurs entières et convergente est stationnaire.

1.1. **Suites réelles.**

Définition. *Soit u une suite réelle. On dit que*

1. u est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,

2. u est strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$,

3. u est décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,

4. u est strictement décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > u_{n+1}$,

5. u est monotone si u est croissante ou décroissante,

6. u est strictement monotone si u est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 2. *Soit u une suite réelle. On a les équivalences suivantes*

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}) \iff (\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leqslant p \Rightarrow u_n \leqslant u_p)\,.$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}) \iff (\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow u_n < u_p)\,.$$

On pourra utiliser cette proposition comme définition équivalente sans s'en justifier.

Proposition 3. *Soit u une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Si $\lambda \geqslant 0$ et u est croissante (resp. décroissante) alors λu est croissante (resp. décroissante).
Si $\lambda \leqslant 0$ et si u est croissante (resp. décroissante) alors λu est décroissante (resp. croissante).

Proposition 4. *La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est une suite croissante (resp. décroissante). De plus, si l'une d'entre elles est strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors la somme est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Proposition 5. *Ces propositions restent vraies pour les notions de croissance à partir d'un certain rang.*

Voir TD pour les démonstrations. Méthode : si on bloque devant un énoncé qui ne nomme pas les variables, on le reformule. *Montrer que la somme de deux suites croissantes est croissante* se reformule par exemple par : *Soient u et v deux suites croissantes, montrons que $u+v$ est croissante.*
Question Que peut-on dire du produit de deux suites strictement croissantes ?

Exemple(s). *Soient $\lambda > 0$, $\mu \geqslant 0$, u une suite strictement croissante APCR et v une suite croissante APCR. Montrer que $\lambda u + \mu v$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.*
Preuve : On traduit les hypothèses : Il existe $N_u, N_v \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_u$, $u_n < u_{n+1}$ et pour tout $n \geqslant N_v$, $v_n \leqslant v_{n+1}$. Puisque $\lambda > 0$, on a encore pour tout $n \geqslant N_u$, $\lambda u_n < \lambda u_{n+1}$ et de même pour tout $n \geqslant N_v$, $\mu v_n \leqslant \mu v_{n+1}$. Alors pour tout $n \geqslant \max(N_u, N_v)$, $\lambda u_n + \mu v_n < \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}$. Donc $\lambda u + \mu v$ est strictement croissante à partir du rang $N = \max(N_u, N_v)$.

Remarque. *Il existe des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes (ni APCR), par exemple u définie par $u_n = (-1)^n$. On ne peut généralement rien dire de la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante. Considérer par exemple les suites u et v définies pour $n \in \mathbb{N}$ par :*
$u_n = 2n$ et $v_n = -n$, auquel cas $u + v$ est croissante,
$u_n = n$ et $v_n = -n^2$, auquel cas $u + v$ est décroissante,
$u_n = n$ et $v_n = -n + (-1)^n$, auquel cas $u_n + v_n = (-1)^n$ définit une suite non monotone (ni croissante, ni décroissante) bien que u et v soient monotones.

Réponse Soient $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n$ alors u et v sont croissantes et uv est croissante.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$ alors u et v sont croissantes et uv est décroissante.
On ne peut donc rien dire du produit de deux suites (strictement) croissantes.

Minoration et majoration.

Définition. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :*

1. u est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant M$.

2. u est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $m \leqslant u_n$.

3. u est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M$.

Ces définitions sont équivalentes au fait que l'ensemble image $u(\mathbb{N})$ est majoré, resp. minoré, resp. borné. Cet ensemble étant non vide, les théorèmes d'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure donne que :

1. u est majorée si et seulement si $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe.

2. u est minorée si et seulement si $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe.

3. u est bornée si et seulement si $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ existe.

Exemple(s). *La suite u, définie pour $n \in \mathbb{N}$, par :*
$\diamond$ *$u_n = e^{-2n}$, est minorée et majorée et on a $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 0$ et $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = 1$;*
$\diamond$ *$u_n = \dfrac{3n-1}{2} = \dfrac{3}{2}n - \dfrac{1}{2}$, est minorée et non majorée. On a $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \min\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = -\frac{1}{2}$ et $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ n'existe pas.*

Remarque. *Que voudrait dire que u est majorée APCR ?*
Qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant M$. Montrons que u est alors majorée. Posons $M' = \max(\{u_0, \dots, u_N\} \cup \{M\})$, alors M' est bien défini car tout ensemble fini non vide admet un maximum et pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant M'$.

Proposition 6. *1. Une suite réelle u est bornée si et seulement si la suite $|u|$ est majorée.*

2. Une suite réelle u est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Proposition 7. *Soient u et v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. Si u et v sont majorées (resp. minorées), alors la suite $u + v$ est majorée (resp. minorée).

2. Si $\lambda \geqslant 0$ et si u est majorée (resp. minorée) alors la suite λu est majorée (resp. minorée).

3. Si $\lambda \leqslant 0$ et si u est majorée (resp. minorée) alors la suite λu est minorée (resp. majorée).

La somme d'une suite majorée et d'une suite minorée peut très bien n'être ni majorée, ni minorée : pour $n \geqslant 0$, $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et $v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ définissent une suite u minorée par 0 et une suite v majorée par 0 et $u+v$ n'est ni majorée, ni minorée. En effet, $(u+v)_n$ vaut $-n$ si n est impair et n si n est pair.

Proposition 8. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Si f est (strictement) croissante alors la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ est (strictement) croissante. De même si f est décroissante, minorée, majorée ou bornée.*

Exemple(s). *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que f est décroissante sur $[M, +\infty[$. Montrons que la suite u définie par $u_n = f(n)$ est décroissante APCR.*

Preuve : Posons $N = 1 + E(M)$ alors pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(n) = u_n$ donc u est décroissante à partir du rang N.

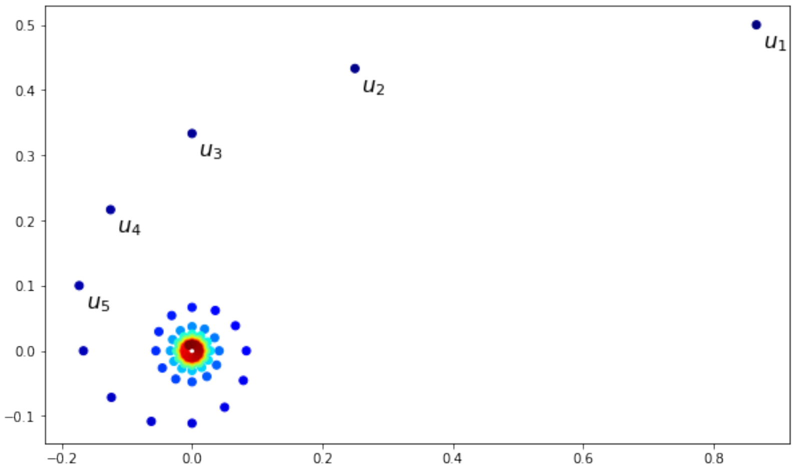
1.2. Suites réelles et complexes.

Définition (Généralisation des suites bornées). *Une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M$.*

Exemple(s). *La suite définie par $z_n = 1 + in$ n'est pas bornée (pour tout n, $|z_n| \geqslant |\mathrm{Im}(z_n)| = n$). La suite définie par $z_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ est bornée (pour tout n, $|z_n| = 1$).*

Représentation graphique des suites complexes :

Suite complexe définie par $z_n = \frac{1}{n}e^{\frac{ni\pi}{6}}$



Proposition 9. *Soient $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si u et v sont bornées, alors $u+v$, λu et uv sont des suites bornées.*

Preuve : Par hypothèse, il existe $M_u, M_v \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M_u$ et $|v_n| \leqslant M_v$ d'où $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_u + M_v$, $|u_n + \lambda v_n| \leqslant M_u + |\lambda| M_v$ et $|u_n v_n| \leqslant |u_n||v_n| \leqslant M_u M_v$.

Proposition 10. *Soient $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $z_n = x_n + iy_n$. z est bornée si et seulement si x et y sont bornées.*

Preuve : On a pour tout n, $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$, $|x_n| = |\mathfrak{Re}(z_n)| \leqslant |z_n|$, $|y_n| = |\mathfrak{Im}(z_n)| \leqslant |z_n|$.
($\Rightarrow$) Si z est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant M$ or $|x_n| \leqslant |z_n|$ et $|y_n| \leqslant |z_n|$ donc $|x_n| \leqslant M$ et $|y_n| \leqslant M$. Ainsi, x et y sont bornées.
($\Leftarrow$) Si x et y sont bornées, alors $x + iy$ est une combinaison linéaire de suites bornées donc elle-même bornée (d'après la proposition précédente).

2. Suites convergentes et divergentes

2.1. **Notion de suite convergente.**

Définition. — *Une suite u converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si :*

(1) $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

— *On dit u est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que u converge vers ℓ.*

Remarque. *Une suite u tend vers ℓ si et seulement si la suite $v = u - \ell$ tend vers 0. De plus, u tend vers 0 si et seulement si $|u|$ tend vers 0.*

Remarque. *Dans le cas réel uniquement,* $|u_n - \ell| < \varepsilon \Longleftrightarrow \varepsilon - \ell < u_n < \varepsilon + \ell \Longleftrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ *où $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est un intervalle centré autour de ℓ de longueur 2ε.*

Exemple(s). *Montrons, uniquement à l'aide de la définition, que la suite définie par $u_n = 5i/n$ pour $n \geqslant 1$ converge vers $\ell = 0$.*
Soit $\varepsilon > 0$. Pour montrer qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ vérifiant (1), construisons un candidat explicite. On a

$$|u_n - 0| = 5/n < \varepsilon \Longleftrightarrow n > 5/\varepsilon\,,$$

donc en posant $N_\varepsilon = \mathrm{E}(5/\varepsilon) + 1$, on a bien pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Qui peut le plus peut le moins :
Pour $\varepsilon = 1$, le rang minimal à partir duquel $|u_n - \ell| < 1$ est donc $N_1 = \mathrm{E}(5) + 1 = 6$. Alors,
◇ *pour tout $N \geqslant N_1$, on a encore : $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < 1$ car $n \geqslant N \geqslant N_1$ donc on aurait pu considérer $N_1 = 7$ ou $N_1 = 99$.*
◇ *pour tout $\varepsilon' > 1$, on a encore pour tout $n \geqslant N_1$, $|u_n - \ell| < 1 < \varepsilon'$ donc on pourrait considérer $N_{\varepsilon'} = N_1$.*
En revanche, si $\varepsilon = 1/2$, $N_\varepsilon = N_1 = 6$ ne convient plus ($u_6 = 5/6 > 1/2$). La "difficulté" dans un cas général consiste donc à vérifier l'existence de N_ε pour ε arbitrairement petit.

Exemple(s). *Si u est la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 5 - \frac{3}{n} + \frac{\sin(n)}{1000}$ alors APCR, on a $|u_n - \ell| < \frac{2}{1000}$ avec $\ell = 5$ mais u n'est pas convergente.*

Exemple(s). — *Une suite stationnaire est convergente.*
- — *La suite u définie par $u_n = r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $r \in \mathbb{C}$, $|r| < 1$, qui est une suite géométrique de raison r, converge vers 0. Voir TD.*
- — *La suite définie par $z_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ converge vers 1.*

Lemme. *Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si z converge vers ℓ alors $\mathfrak{Re}(z)$ converge vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ converge vers $\mathfrak{Im}(\ell)$.*

Preuve : On a pour tout $c \in \mathbb{C}$, $|c| = \sqrt{\mathfrak{Re}(c)^2 + \mathfrak{Im}(c)^2}$, $|\mathfrak{Re}(c)| \leqslant |c|$, $|\mathfrak{Im}(c)| \leqslant |c|$.
Notons $x = \mathfrak{Re}(z), y = \mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a $z = x + iy$.
Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ et $N_{y,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N_{x,\varepsilon}, |x_n - a| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N_{y,\varepsilon}, |y_n - b| < \varepsilon\,.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| \leqslant |z_n - \ell|$ (puisque $x_n - a = \mathfrak{Re}(z_n - \ell)$) et $|y_n - b| \leqslant |z_n - \ell|$ et puisque z converge vers ℓ, il existe $N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_{z,\varepsilon},\ |z_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Donc pour tout $n \geqslant N_{z,\varepsilon}$, $|x_n - a| < \varepsilon$ et $|y_n - b| < \varepsilon$. On peut donc poser $N_{x,\varepsilon} = N_{y,\varepsilon} = N_{z,\varepsilon}$. □
On montrera la réciproque de ce lemme grâce aux opérations sur les limites.

Fin Séance 4 - 2024

Proposition 11. *Soient $\ell \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*
Si u converge vers ℓ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve : Exemples : informellement, on a $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$, $(u_{n+5})_{n\in\mathbb{N}} = (u_5, u_6, u_7, \ldots)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u tend vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Or si $n \geqslant N_\varepsilon$, $n + k \geqslant N_\varepsilon$ (car $k \geqslant 0$) donc on a

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_{n+k} - \ell| < \varepsilon.$$

Ceci montre que $v^{(k)} = (u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

2.2. Premières propriétés des suites convergentes.

Proposition 12 (Unicité de la limite). *Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*
Si u converge vers ℓ et vers ℓ' alors $\ell = \ell'$. On dit que ℓ est la limite de u.

Preuve : Méthode : on peut montrer une égalité par double inégalité ou montrer que $\forall \varepsilon > 0, |\ell - \ell'| < \varepsilon$. Par hypothèse, on contrôle les longueurs $|u_n - \ell|$ et $|u_n - \ell'|$ donc par inégalité triangulaire, on contrôle $|\ell - \ell'|$ (dessin en 2D puis 1D).
Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $|\ell - \ell'| < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par inégalité triangulaire

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'|\,.$$

Comme u converge vers ℓ, il existe $N_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $N'_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $|u_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $n \geqslant \max(N_{\frac{\varepsilon}{2}}, N'_{\frac{\varepsilon}{2}})$, on a

$$0 \leqslant |\ell - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Ainsi $\ell = \ell'$. □
(Il n'est pas nécessaire de noter $N_{\frac{\varepsilon}{2}}$, la propriété de majoration n'est pas attachée à cette notation, on la redéfinit à chaque fois.)

Proposition 13. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, alors la suite $\big(u_{n+1} - u_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.*

Preuve : Notons ℓ la limite de u.
Intuitivement, $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell - \ell = 0$. Cette écriture découle 1) des opérations sur les suites et 2) de la limite de la suite extraite $n \mapsto u_{n+1}$. Les éléments pour une preuve directe sont néanmoins dans cette intuition : faire apparaître $|u_n - \ell|$ et $|u_{n+1} - \ell|$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par inégalité triangulaire

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \leqslant |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell|\,.$$

Comme u converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc aussi $|u_{n+1} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ car alors $n + 1 \geqslant N_\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Méthode 2 (par anticipation du cours) : notons v la suite définie par $v_n = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a montré ci-dessus sans le dire que v tend vers ℓ (à re-rédiger proprement en exercice) donc par opération sur les limites, $u - v$ tend vers 0. □

Exemple(s). *La suite u définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant 0$ n'est pas convergente car $|u_{n+1} - u_n| = 2$ (or la suite $\big(u_{n+1} - u_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $\big(|u_{n+1} - u_n|\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0).*

La réciproque de cette propriété est fausse : pour u définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0 mais la suite u tend vers $+\infty$. On a donc une condition nécessaire à la convergence d'une suite mais non suffisante.

Proposition 14. *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve : Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{K}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|u_n - \ell| \leqslant 1$. On veut majorer $|u_n|$, on a au choix : par l'inégalité triangulaire inverse, $|u_n| - |\ell| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant 1$, d'où $|u_n| \leqslant 1 + |\ell|$; ou : par l'inégalité triangulaire, $|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$. Ainsi, u est bornée APCR, donc bornée : Notons $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N_1 - 1}|, 1 + |\ell|) = \max(\{1 + |\ell|\} \cup \{|u_n| \,/\, n \in [\![0, N_1 - 1]\!]\})$ qui est bien défini car tout ensemble fini admet un maximum. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. Donc u est bornée.
La réciproque de cette propriété est fausse : la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée (par 1) mais n'est pas convergente.

2.3. Notion de suite divergente.

Définition. *Une suite est divergente si elle n'est pas convergente. Autrement dit, une suite est divergente si :*

$$\forall \ell \in \mathbb{K}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon\,.$$

Exemple(s). *La suite définie par $u_n = (-1)^n i$ est divergente (car sa partie imaginaire est la suite divergente définie par $y_n = (-1)^n$).*

Définition. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle.*

— *On dit que u tend vers $+\infty$ si*
$$\forall M > 0,\ \exists N_M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_M,\ u_n > M$$
— *On dit que u tend vers $-\infty$ si*
$$\forall M > 0,\ \exists N_M \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_M,\ u_n < -M$$

Exemple(s). *1. Soit $r > 1$. Alors la suite géométrique $(r^n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.*

2. La suite définie par $u_n = (-1)^n n$ est divergente. Elle n'est ni minorée, ni majorée, mais ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

Proposition 15. *Toute suite réelle u qui tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$, est divergente.*

Preuve : Toute suite convergente est bornée. Par contraposée, si une suite est non bornée, elle diverge. Or une suite réelle u qui tend vers $+\infty$, resp. $-\infty$, est un cas particulier de suite non majorée, resp. non minorée. Par définition, une suite est majorée si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M.$$
Donc une suite est non majorée si
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$$
Soit donc $M \in \mathbb{R}$, si u tend vers $+\infty$, il existe $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_M} > M$ donc u n'est pas majorée. On raisonne de manière similaire si u tend vers $-\infty$. □

On distingue 2 types de suites (réelles) divergentes :

1. celles qui ont une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$),
2. celles qui n'ont pas de limite (finie ou infinie).

2.4. Opérations sur les limites.

Proposition 16 (Opérations sur les suites convergentes)**.** *Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives $\ell \in \mathbb{K}$ et $\ell' \in \mathbb{K}$.*

1. $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$.

2. $uv = (u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell\ell'$.

3. Si de plus $\ell' \neq 0$, alors

3.1. v est non nulle à partir d'un certain rang,

3.2. la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_n$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{1}{\ell'}$,

3.3. la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bien définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

Voir TD.

Proposition 17. *Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite z converge vers ℓ si et seulement si $\mathfrak{Re}(z)$ converge vers $\mathfrak{Re}(\ell)$ et $\mathfrak{Im}(z)$ converge vers $\mathfrak{Im}(\ell)$.*

Preuve : Notons $x = \mathfrak{Re}(z), y = \mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a $z = x + iy$.
($\Leftarrow$) En utilisant la prop précédente : si y converge vers b, iy converge vers ib d'après 2. et $z = x + iy$ converge vers $a + ib$ d'après 1.
($\Rightarrow$) Ce sens est le résultat du lemme précédent.

Corollaire 1. *La suite z converge vers ℓ si et seulement si $\overline{z}$ converge vers $\overline{\ell}$.*

Preuve : on décompose selon les parties réelles et imaginaires (laissé en exercice).

Opérations sur les suites réelles divergentes.

Limite de $u+v$ selon la nature des suites réelles u et v			
$u_n \xrightarrow{n\to\infty}$ \\ $v_n \xrightarrow{n\to\infty}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée	$-\infty$

Exemple(s). *Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, $u=(n^\alpha)_n$ et $v=(n^\beta)_n$. La limite de $u-v$ dépend du signe de $\alpha-\beta$.*

Limite de uv selon la nature des suites réelles u et v					
$u_n \xrightarrow{n\to\infty}$ \\ $v_n \xrightarrow{n\to\infty}$	$\ell'<0$	$\ell'=0$	$\ell'>0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell<0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell=0$	0	0	0	Forme Indéterminée	Forme Indéterminée
$\ell>0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple(s). *Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $u=(n^\alpha)_n$ et $v=(n^\beta)_n$. La limite de $uv=(n^{\alpha+\beta})_n$ dépend du signe de $\alpha+\beta$.*
Si $u=(3n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v=(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors uv est constante égale à 3 (la limite du produit n'est donc ici ni $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ni $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$).

Proposition 18. *Si u est une suite réelle qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors la suite $\frac{1}{u}$ est bien définie à partir d'un certain rang et elle tend vers 0.*

Preuve : voir TD.

2.5. **Limites et inégalités.**

Qui dit inégalités, dit encore suites réelles (pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec la multiplication et qui prolongerait de celle de $\mathbb{R}$) !
(Si $i\geqslant 0$, $-1<1\Rightarrow -i<i\Rightarrow -i^2<i^2\Rightarrow 1<-1$, si $i\leqslant 0$, on obtient de même $1<-1$.)

Proposition 19 (Passage à la limite dans des inégalités)**.** *Soient u et v deux suites réelles et $\ell,\ell'\in\mathbb{R}$. On suppose que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant v_n. \tag{2}$$

On a les résultats suivants.
1. Si u tend vers ℓ et v tend vers ℓ', alors $\ell\leqslant\ell'$.
2. Si u tend vers $+\infty$, alors v tend vers $+\infty$.
3. Si v tend vers $-\infty$, alors u tend vers $-\infty$.
Les résultats restent valides si l'hypothèse (2) n'est vraie qu'à partir d'un certain rang. C'est encore le cas si l'inégalité dans (2) est stricte, cependant les inégalités en conclusion restent larges.

Exemple(s). *L'inégalité stricte $u_n<v_n$ n'est pas nécessairement conservée à la limite : si $u_n=1-\frac{1}{n}$ et $v_n=1$, on a $u_n<v_n$ pour tout $n\geqslant 1$, mais il y a égalité des limites.*

Preuve : 1. Méthode 1 : Supposons par l'absurde que $\ell'<\ell$ alors en posant $\varepsilon=\frac{\ell-\ell'}{2}$, on a

$$\ell'<\ell'+\varepsilon=\ell-\varepsilon<\ell$$

($\ell'+\varepsilon=\ell-\varepsilon$ est le point médian entre ℓ' et ℓ). Puisque u tend vers ℓ, il existe $N_u\geqslant 0$ tel que pour tout $n\geqslant N_u$, $|u_n-\ell|<\varepsilon$, en particulier $\ell-\varepsilon<u_n$. Puisque v tend vers ℓ', il existe $N_v\geqslant 0$ tel que pour tout $n\geqslant N_v$, $|v_n-\ell'|<\varepsilon$ et en particulier, $v_n<\ell'+\varepsilon$. Donc pour tout $n\geqslant\max(N_u,N_v)$, on a $v_n<\ell'+\varepsilon=\ell-\varepsilon<u_n$ et en particulier, $v_n<u_n$. Contradiction.

Méthode 2 : Soit $\varepsilon>0$. Puisque u tend vers ℓ, il existe $N_u\geqslant 0$ tel que pour tout $n\geqslant N_u$, $|u_n-\ell|<\varepsilon$, en particulier $\ell-\varepsilon<u_n$. Puisque v tend vers ℓ', il existe $N_v\geqslant 0$ tel que pour tout $n\geqslant N_v$, $|v_n-\ell'|<\varepsilon$ et en particulier, $v_n<\ell'+\varepsilon$. Donc pour tout $n\geqslant\max(N_u,N_v)$, on a $\ell-\varepsilon<u_n\leqslant v_n<\ell'+\varepsilon$. En particulier, $\ell<\ell'+2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, il vient $\ell\leqslant\ell'$ (d'après le lemme de réécriture).

2. Soit $M > 0$, il existe $N_{u,M} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_{u,M}$, $u_n > M$. Mais alors $v_n \geqslant u_n > M$ et donc v tend vers $+\infty$ (avec $N_{v,M} = N_{u,M}$ pour satisfaire la définition).

3. On peut raisonner comme en 2. ou remarquer qu'on a $-v_n \leqslant -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or la suite $-v$ tend vers $+\infty$ donc d'après 2., la suite $-u$ tend vers $+\infty$ donc u tend vers $-\infty$. □

Exemple(s). *Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2+\sin(n)+3}{4n} + \cos(n)$. On ne peut pas utiliser les règles de sommation car $n \mapsto \cos n$ ne tend ni vers une limite finie, ni vers une limite infinie. On a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \frac{n^2+2}{4n} - 1 \geqslant \frac{n}{4} - 1 := v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.*

Théorème 1 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient u, v, $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), on a l'inégalité $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$,*
- *et les suites u, w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

Alors la suite v converge vers ℓ.

Preuve : Attention, on ne peut pas appliquer directement les propositions de passage à la limite ici car cela reviendrait à supposer que v converge avant de l'avoir montré.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_u \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. En particulier, on a $\ell - \varepsilon < u_n$. De même, il existe $N_w \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N_w$, $|w_n - \ell| < \varepsilon$ et donc en particulier $w_n < \ell + \varepsilon$. En posant $N_v = \max(N_u, N_w)$, on a donc pour $n \geqslant N_v$,

$$\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon$$

donc $|v_n - \ell| < \varepsilon$. C'est exactement dire que v est convergente, de limite ℓ. □

Exemple(s). *Soit $u_n = \frac{n+(-1)^n}{3n+2}$ pour $n \geqslant 0$. La convergence de la suite u se démontre le plus facilement en utilisant un équivalent. À ce stade du cours, profitons-en pour illustrer le théorème et pratiquer la division euclidienne :*
On a $\frac{n-1}{3n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{3n+2}$ donc par le théorème des gendarmes, u est convergente, de limite $\frac{1}{3}$ car $n \mapsto \frac{n-1}{3n+2}$ et $n \mapsto \frac{n+1}{3n+2}$ convergent vers $\frac{1}{3}$. En effet, pour tout $n \geqslant 0$, $\frac{n-1}{3n+2} = \frac{1}{3}\frac{3n-3}{3n+2} = \frac{1}{3}\frac{3n+2-5}{3n+2} = \frac{1}{3} - \frac{5}{9n+6}$. Cette dernière fraction tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. De même, $\frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9n+6}$.

Fin Séance 5 - 2024

2.6. Limites et suites monotones, suites adjacentes.

Théorème 2 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure)**.** *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$. S est la borne supérieure de A si et seulement si*

1. *S est un majorant de A,*
2. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers S.*

Preuve : voir TD.

Exemple(s). ⋄ *$A = [0,1] \cup \{\pi\} \cup \{5 - \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est majoré par 5.*
De plus, la suite u, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 5 - \frac{1}{n} \in A$, tend vers 5 donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, A admet donc une borne supérieure et elle vaut 5.
⋄ *$A = \{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2^n}\right) \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ admet $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ pour maximum (terme donné par $n = 1$) donc $\sup A = 1$. La caractérisation séquentielle est bien vérifiée en considérant la suite constante égale au maximum.*

Théorème 3 (Limite monotone)**.** *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

1. *Si u est croissante et majorée, alors $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe, u converge vers ℓ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$.*
2. *Si u est décroissante et minorée, alors $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existe, u converge vers ℓ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leqslant u_n$.*

Remarquons la cohérence entre l'unicité de la borne supérieure et l'unicité de la limite.
Preuve : Supposons que u est croissante et non majorée. Alors l'ensemble $u(\mathbb{N}) = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$. Ainsi, par le théorème d'existence de la borne supérieure, $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure, que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ puisque ℓ est un majorant de $u(\mathbb{N})$.

Montrons que u converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$, par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $a_\varepsilon \in u(\mathbb{N})$ tel que $\ell - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant \ell$; autrement dit, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que $\ell - \varepsilon < u_{N_\varepsilon} \leqslant \ell$. Alors u étant croissante, il vient que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, $\ell - \varepsilon < u_{N_\varepsilon} \leqslant u_n \leqslant \ell$ d'où $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. La suite u est donc bien convergente, de limite ℓ.
Le cas décroissant est laissée en exercice (voir Annales).

Exemple(s). *La suite définie sur $\mathbb{N}$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente. En effet, la suite u est croissante (c'est une somme de termes positifs). De plus, pour $n \geqslant 2$,*

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 3.$$

Ainsi u est majorée. Par le résultat précédent, u est convergente. On pourrait montrer que $e \approx 2,718$ est sa limite.

Remarque. *Une caractéristique majeure du théorème de la limite monotone est de montrer l'existence d'une limite pour une suite (croissante ou décroissante)* sans même connaître la limite a priori*.*

Proposition 20. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est croissante et non majorée, alors u a pour limite $+\infty$.*

Preuve : Supposons que u est croissante et non majorée et soit $M > 0$. Comme u est non majorée, il existe $N_M \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_M} > M$. Mais alors comme u est croissante, on a pour tout $n \geqslant N_M$, $u_n \geqslant u_{N_M} > M$. On a donc bien $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
On a donc deux possibilités pour le comportement asymptotique d'une suite croissante comme le résume le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Toute suite réelle croissante est soit convergente ou soit admet comme limite $+\infty$.*

Preuve : Une suite croissante est soit majorée, auquel cas elle est convergente d'après le Théorème de la limite monotone, soit non majorée auquel cas d'après la proposition précédente, elle admet pour limite $+\infty$.

Les deux résultats précédents se déclinent dans le cas où la suite est décroissante :

Proposition 21. *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si u est décroissante et non minorée, alors elle admet pour limite $-\infty$.*

Preuve : Supposons que u est décroissante et non minorée et posons $v = -u$. Alors v est croissante et non majorée donc d'après la proposition précédente, v tend vers $+\infty$. Par opération sur les limites, u converge vers $-\infty$.

Corollaire 3. *Toute suite réelle décroissante est soit convergente ou soit admet comme limite $-\infty$.*

Remarque. *Le théorème de la limite monotone est fondamental car il dépend intrinsèquement de la nature de $\mathbb{R}$: la validité du théorème d'existence de la borne supérieure est équivalente à celle du théorème de la limite monotone. L'ensemble $\mathbb{R}$ en est en fait complètement caractérisé : il n'y a qu'un seul corps (à isomorphisme près) totalement ordonné dont les suites croissantes et majorées convergent (ou de manière équivalente dont les sous-ensembles non vides et majorés admettent une borne supérieure).*

Application : suites adjacentes

Définition. *Deux suites $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont* adjacentes *si les assertions suivantes sont vraies :*

1. *u est croissante*
2. *v est décroissante*
3. *la différence $v_n - u_n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.*

Proposition 22. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec u croissante. Si u et v sont adjacentes, alors les deux suites sont convergentes, de même limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*

Preuve : Soient u et v deux suites adjacentes. Montrons d'abord que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant v_n$. La suite w de terme général $w_n = v_n - u_n$ est décroissante (comme somme de deux suites décroissantes v et $-u$) et convergente vers 0 par hypothèse. D'après le théorème de la limite monotone, elle est minorée par sa limite : $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et donc $v_n \geqslant u_n$.
Par conséquent, par croissance de u et décroissance de v, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Donc u est croissante, majorée par v_0 donc convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors par opération sur les limites, $v = u + w$ converge et tend vers $\ell + 0$.
Enfin, comme u est croissante et majorée, elle est majorée par sa limite : $u_n \leqslant \ell$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, v étant décroissante et minorée, on a $\ell \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Remarque. *Toutes les conditions de la définition comptent : si $u = (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (n + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors u est croissante, $u - v$ tend vers 0 mais les deux suites sont divergentes (v n'est pas décroissante).*
La propriété "pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$" ne fait pas partie de la définition, c'est un résultat qui se déduit de la définition.

3. Comparaison asymptotique de suites réelles

La comparaison asymptotique consiste à comparer une suite ou une fonction à une autre plus « simple » à l'infini (ou au voisinage d'un point). Une étude asymptotique se concentre sur le comportement "très loin" (à l'infini) ou en zoomant infiniment (localement une fonction de classe C^1 peut être approximée par sa tangente). Pour les suites, quand on zoom sur un terme, il n'y a que lui ! C'est donc toujours le comportement à l'infini qui est étudié.

3.1. Définitions.

Définition. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
La suite u est négligeable devant la suite v, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ qui converge vers 0 et telle que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \varepsilon_n v_n$.
Autrement dit, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ si

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists (\varepsilon_n)_{n\geqslant N},\ \left(\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \quad et \quad \forall n \geqslant N,\ u_n = \varepsilon_n v_n\right).$$

Définition. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
La suite u est équivalente à la suite v, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\delta_n)_{n\geqslant N}$ qui tend vers 1 pour $n \to \infty$ telle que que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$.

Ces définitions se généralisent à des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ ou à partir d'un certain rang N_0 (auquel cas on demande à avoir $N \geqslant N_0$).

Exemple(s). *1. Si $u = (n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (n^5)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant $\varepsilon_n = \frac{1}{n^3}$ pour $n \geqslant 1$, on déduit par définition que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.*

2. Si $u = (\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}})_{n\geqslant1}$, en posant $\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$, on déduit par définition que $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
De même, en posant $\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$, on déduit que $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
La suite ε absorbe les différences de signe éventuelles des suites u et v.

3. Si $u = (n + \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \delta_n n$ avec $\delta_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$ donc $n + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ (ici u est définie sur $\mathbb{N}$ mais l'égalité $u_n = \delta_n n$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$).
On peut aussi montrer que $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Il n'y a pas unicité des égalités de négligeabilité ou des relations d'équivalence.

Remarque. *Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Si $v_n = 0$, alors $\delta_n v_n = 0$ donc nécessairement $u_n = 0$.*
Une suite équivalente à 0 est nécessairement une suite stationnaire (égale à 0 à partir d'un certain rang).

Proposition 23 (Définition équivalente dans le cas où $v_n \neq 0$ APCR)**.** *Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \neq 0$. Alors*

1. $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *si et seulement si la suite* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geqslant N}$ *tend vers* 0 *pour* $n\to\infty$*.*

2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *si et seulement si la suite* $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geqslant N}$ *tend vers* 1 *pour* $n\to\infty$*.*

Preuve : on divise par $v_n \neq 0$ dans la définition précédente.
La définition est plus générale (v peut s'annuler) mais la proposition est plus pratique à utiliser.

Exemple(s). *Si* $u_n \neq 0$ *APCR alors pour tout* $a\in\mathbb{R}$*,* $a\neq 1$*, les suites* au *et* u *ne sont pas équivalentes puisque* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{au_n}{u_n} = a$*.*

Exemple(s). *Comparaison asymptotique de* $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ *et* $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *:*
Intuitivement, le terme dominant de u_n *est* $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *car* $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$*. On a*

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \textit{donc} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

En revanche, pour démontrer des propriétés théoriques, on reviendra souvent aux définitions initiales.

Proposition 24 (Caractérisation des limites)**.** *Soit* $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*. On a*

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$
$$\textit{et} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \iff \lim_{n\to\infty} u_n = \ell, \ \textit{si } \ell\neq 0.$$

Preuve : En considérant v la suite constante égale à 1, $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ signifie $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ donc que u est négligeable devant la suite constante égale à 1.
On démontre ces deux équivalences par double implication.
1) Supposons que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, alors
(on traduit les hypothèses) par définition, il existe $N\in\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et pour tout $n\geqslant N$, $u_n = \varepsilon_n$.
(On veut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$) Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
(On veut montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ tels que ... Il faut donc construire ces variables.) u étant définie sur $\mathbb{N}$, on pose $N=0$ et $\varepsilon = u$. Alors on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$ et pour tout $n\geqslant N$, $u_n = \varepsilon_n$ donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.
Par la suite, pour alléger les démonstrations, on se contentera le plus souvent d'écrire que ε et δ sont définies APCR.
2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$, il existe une suite $(\delta_n)_n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \delta_n\ell$. Alors par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell\neq 0$, posons $\delta = \frac{1}{\ell}u$ alors par opération sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n = 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \delta_n\ell$.

Exemple(s). *1.* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ *donc* $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$*, mais* $\frac{1}{n}$ *n'est pas équivalent à* 0 *!*

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ *(voir TD) donc* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e$*.*

Notation : Soient u, v, $w\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Écrire

$$u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$

signifie

$$u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)\ .$$

Exemple(s). *1. Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$ *donc* $u_n - \ell = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ *soit encore* $u_n = \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$*.*
Par exemple, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$*.*

2. L'égalité $u_n = \frac{1}{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}$ *signifie qu'il existe une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ *et pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *(ou APCR),* $u_n = \frac{1}{1+v_n}$*. Ainsi,* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *et par opération sur les limites,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$ *donc* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ *soit encore* $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$*.*

3.2. **Règles de calculs.**

Proposition 25 (Règles de calculs avec les "$\sim$")**.** *Soient* $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*

1. Réflexivité : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

2. Symétrie : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

3. Transitivité : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n,\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \Rightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

Remarque : L'équivalence entre deux suites est un exemple parmi d'autres de relation d'équivalence. Une relation d'équivalence est définie par ces trois propriétés. Autre exemple : sur $\mathbb{Z}$, la congruence modulo n (pour un entier n fixé) est une relation d'équivalence.
◇ Réflexivité : $2 \equiv 2[5]$,
◇ Symétrie : $2 \equiv 7[5] \Leftrightarrow 7 \equiv 2[5]$,
◇ Transitivité : $12 \equiv 7[5]$ et $7 \equiv 2[5]$ donc $12 \equiv 2[5]$.
La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'équivalence puisqu'elle n'est pas symétrique. La transitivité permet les abus de notation de type $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

Preuve : 1. Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par définition, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ s'il existe $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 1 et telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \delta_n u_n$. Il faut montrer l'existence d'une suite δ, donc on en construit un exemple valide. Ceci est vérifié avec la suite δ constante égale à 1.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $N\in\mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n\geqslant N}$ convergeant vers 1 et telle que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$, δ est strictement positive APCR. Notons N_1 ce rang (obtenu par exemple en considérant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite) et $N' = \max(N, N_1)$. Alors la suite δ', définie par $\delta'_n = \frac{1}{\delta_n}$ pour tout $n \geqslant N'$, tend vers 1 et $v_n = \delta'_n u_n$ donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
3. Voir TD.

Proposition 26 (Règles de calculs avec les "$\sim$")**.** *Soient* $u, v, w, t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*.*

4. Produit terme à terme : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n,\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \Rightarrow u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$

5. Passage à l'inverse : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$*,* $u_n, v_n \neq 0$ *APCR* $\Rightarrow \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$

6. Passage à la puissance : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$*, si définis pour* $\alpha\in\mathbb{R}$ *est fixé*

7. Composition par $\ln$ *: si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$*, alors* $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$*.*

Voir TD.

Exemple(s). (4.) *par réflexivité,* $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ *donc si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *alors* $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n w_n$*.*
(4.) $\sqrt{n+1}\sin(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sin(n+1)$ *car* $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ *et* $\sin(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin(n+1)$*.*
(5.) $\frac{1}{2n^3-7n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$ *car* $2n^3 - 7n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^3$*.*
(6.) α *ne doit pas dépendre de* n *: on a* $1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ *mais* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *n'est pas équivalent à* 1^n *car* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$*.*
(7.) $\ln(2n^3 - 7n + 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(2n^3) = \ln 2 + 3\ln n$ *(*$\ln(2n^3) \neq 3\ln(2n)$ *!) car* $2n^3 - 7n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^3$*.*
(7.) *on a* $1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ *mais* $\ln(1+\frac{1}{n})$ *n'est pas équivalent à* $\ln(1) = 0$*.*

On fera très attention avec la manipulation des équivalents avec la fonction exponentielle. On a

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{u_n - v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$$

En particulier, ce n'est pas parce que $u_n \sim v_n$ qu'on a $e^{u_n} \sim e^{v_n}$! Par exemple $u_n = n+1$ est équivalent à $v_n = n$ mais e^n n'est pas équivalent à e^{n+1}. De même, $\sin(n+1)$ n'est pas équivalent à $\sin(n)$. La composition des équivalents se limite aux fonctions d'élévation à une puissance fixée et au logarithme.

Proposition 27 (Règles de calculs avec les "o"). *Soient u, v, $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

1. *Transitivité des "o" :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,,\ v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n) \Rightarrow u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)\,,$
2. *Stabilité des "o" par addition :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,,\ w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n + w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,,$
3. *Stabilité des "o" par produit :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \Rightarrow u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n w_n)\,.$
4. *Passage à l'inverse :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,,$ $u_n, v_n \neq 0$ *APCR* $\Rightarrow \frac{1}{v_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u_n}\right)$
5. *Passage à la puissance :* $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,, \Rightarrow u_n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n^\alpha)\,,$ *si définis pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé*

Remarque : ni réflexivité, ni symétrie.

Exemple(s). (1.) *puisque* $\frac{1}{n^3} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *si* $v_n = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ *alors* $v_n = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *d'où :*
(2.) *si* $u_n = 3 + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $v_n = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ *alors* $u_n + v_n = 5 + \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *car* $v_n = 2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
(3.) $\frac{1}{n+1} = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$ *donc* $\frac{1}{n(n+1)} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.
(4.) $n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^2\right)$ *donc* $\frac{1}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Lien avec les fonctions.

Proposition 28 (Composition de limite par une fonction continue). *Soit f une fonction continue au voisinage de ℓ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to\ell} f(x)\,.$$

Proposition 29. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de ℓ avec $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors*

1. *Si* $f(x) \underset{x\to\ell}{\sim} g(x)$ *alors* $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$
2. *Si* $f(x) = \underset{x\to\ell}{o}(g(x))$ *alors* $f(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(g(u_n))$

Exemple(s). *Méthode : quand l'argument d'un log tend vers 1, on met ce log sous la forme $\ln(1+x)$. Quand l'argument tend vers $\ell > 0$ avec $\ell \neq 1$, on utilise les opérations sur les limites ou on factorise l'argument par ℓ si on cherche un développement limité plus fin (cf Paragraphe 3.3).*
Déterminons un équivalent de $u_n = \ln(\frac{n+1}{n+2}) = \ln(1 - \frac{1}{n+2})$. *On a* $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ *donc en posant* $x_n = -\frac{1}{n+2}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *d'où* $u_n = \ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ *(conclusion implicite par transitivité :* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$*).*
Déterminons un équivalent de $u_n = \ln(\frac{3n+1}{n+2})$. *Puisque* $\frac{3n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3$, $\frac{3n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ *d'où* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3)$ *donc* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(3)$ *(car* $\ln(3) \neq 0$*).*

Proposition 30 (Pour ne jamais sommer deux équivalents). *Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \qquad \textit{si et seulement si} \qquad u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)\,.$$

Preuve : Montrons cette équivalence par double implication.
($\Rightarrow$) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\delta_n)_{n\geqslant N}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$ et pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$ d'où $u_n - v_n = (\delta_n - 1)v_n$. Posons pour tout $n \geqslant N$, $\varepsilon_n = \delta_n - 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, autrement dit $u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, *i.e.* $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
($\Leftarrow$) Si $u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n = (1+\varepsilon_n)v_n$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $\delta_n = 1 + \varepsilon_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$, autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple(s). *Déterminons un équivalent de* $u_n = \ln(\cos(\frac{1}{n^2})) = \ln(1+\cos(\frac{1}{n^2})-1)$. *On a* $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$ *donc en posant* $x_n = \cos(\frac{1}{n^2}) - 1$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *d'où* $u_n = \ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cos(\frac{1}{n^2}) - 1$. *De plus,*

$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$. *Donc appliqué à* $y_n = \frac{1}{n^2}$*, on a* $\cos(y_n)-1 = -\frac{1}{2n^4}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$i.e. $\cos(\frac{1}{n^2})-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^4}$. *Par transitivité,* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^4}$.

3.3. Comportements asymptotiques standards.

Proposition 31. *Équivalences classiques : soient* u *une suite qui tend vers* 0 *et* $a \in \mathbb{R}$*. Alors,*

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad (1+u_n)^a - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} au_n,$$

$$\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad \cos(u_n)-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}, \quad \tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n, \quad \arctan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n.$$

Soit encore

$$\ln(1+u_n) = u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n), \quad e^{u_n} = 1+u_n+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n), \quad (1+u_n)^a = 1+au_n+\underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$$

$$\sin(u_n) = u_n + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n), \quad \cos(u_n) = 1-\frac{u_n^2}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(u_n^2\right), \quad \ldots.$$

Exemple(s). *Déterminons un développement asymptotique à la précision* $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ *de* $u_n = \ln(\frac{3n+6}{n+3})$*.* *On a* $u_n = \ln(3\frac{n+2}{n+3}) = \ln(3)+\ln(1-\frac{1}{n+3}) = \ln(3)-\frac{1}{n+3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exemple(s). *Déterminons un équivalent de* $u_n = (n^4+1)^{\frac{1}{4}}-n$ *: on écrit* $u_n = n(1+\frac{1}{n^4})^{\frac{1}{4}}-n$*. En utilisant* $\left(1+\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4n^4}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$*, on obtient*

$$u_n = n\left(1+\frac{1}{4n^4}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)-n = \frac{1}{4n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^3}.$$

Exemple(s). *Déterminons un équivalent de* $u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ *: on a*

$$u_n = n\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = n\exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

Posons $v_n = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$*. Puisque* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$*,* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -1$ *et la fonction exponentielle étant continue en* -1*,* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e^{-1}$ *donc* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Fin Séance 6 - 2024

Proposition 32. *Soient* $a,b,q,r \in \mathbb{R}$ *tels que* $a<b$ *et* $0<q<r$ *alors*

$$n^a = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^b\right) \qquad \text{et} \qquad q^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(r^n\right).$$

Exemple(s). *On a* $\sqrt{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^3\right)$ *et* $2^n = \underset{n\to+\infty}{o}(5^n)$*.*

Voir TD.

Proposition 33. *Négligeabilités classiques : soit* $a>0$ *et* $r>1$*. Alors :*

1. $r^n = o(n!)$

2. $\ln(n) = o(n^a)$

3. $n^a = o(r^n)$

Preuve : 1. On a $r^n = r\times r\times\ldots\times r$ (n fois) et $n! = n\times(n-1)\times\ldots\times 2\times 1$.

Puisque $n!>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a, par définition, $r^n = o(n!)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{r^n}{n!} = 0$. On a $\frac{r^n}{n!} = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{r}{k}$.

Pour tout $k \geqslant N$ avec $N = E(r)+1$, on a $\frac{r}{k} \leqslant \frac{r}{N} < 1$ car $r < E(r)+1$. Notons $q = \frac{r}{N}$ alors pour $n \geqslant N$,

$$0 \leqslant \frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^{N}\frac{r}{k}\prod_{k=N+1}^{n}\frac{r}{k} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{N}\frac{r}{k}\right)q^{n-N} = \left(\frac{1}{q^N}\prod_{k=1}^{N}\frac{r}{k}\right)q^n.$$

La suite géométrique de raison $q<1$ tend vers 0 d'où le résultat par théorème des gendarmes.

2. On admet ici la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n^a}{n^a} = 0$ et puisque $\ln n^a = a \ln n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^a} = 0$.

3. Puisque $r^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^a = \underset{n\to+\infty}{o}(r^n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^a}{r^n} = 0$.

On a $\dfrac{n^a}{r^n} = e^{a\ln(n) - n\ln(r)}$. Face à une forme indéterminée, on factorise pour lever l'indétermination : $a\ln(n) - n\ln(r) = -n\ln(r)(1 - \frac{a}{\ln(r)}\frac{\ln(n)}{n}) = -n\ln(r)(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, car $r > 1$ d'où $\frac{n^a}{r^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la conclusion.

Récapitulatif mnémotechnique

Proposition 34. *En notant $u_n \ll v_n$ à la place de $u_n = o(v_n)$, on a pour les infiniment grands :*

$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n! \ll n^n,$$

et pour les infiniment petits :

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1.$$

3.4. **Détermination de limites.**

Proposition 35 (Équivalence et limites)**.** *Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Preuve : 1. Supposons que $\ell \in \mathbb{R}$.
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou APCR), $u_n = \delta_n v_n$. Ainsi, si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$, on a par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Réciproquement, on a par symétrie $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ donc si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a d'après la démonstration du sens indirect, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
2. Supposons que $\ell = +\infty$. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 1$ et pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$.
Comme pour 1., il est attendu à cet endroit du cours d'utiliser les résultats sur les opérations sur les limites. Ainsi par opération sur les suites divergentes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (cas du produit d'une suite convergente de limite strictement positive avec une suite de limite $+\infty$). Mais à titre d'entraînement, revenons aux définitions :
Soit $M > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe $N_{v,M} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_{v,M},\ v_n > 2M\,.$$

Or, la suite δ est minorée APCR par $\frac{1}{2}$. En effet, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N_{\delta,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_{\delta,\varepsilon},\ 1 - \frac{1}{2} < \delta_n < 1 + \frac{1}{2}\,.$$

Posons $N' = \max(N, N_{v,M}, N_{\delta,\varepsilon})$, on a alors

$$\forall n \geqslant N',\ u_n = \delta_n v_n > M\,.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
L'implication réciproque découle encore de la symétrie entre u et v.
3. Si $\ell = -\infty$, on a par produit terme à terme $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ donc d'après 2.

$$\lim_{n\to+\infty} -u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} -v_n = +\infty$$

d'où le résultat.

Exemple(s). *Déterminons la limite de* $u_n = n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n})$.
On ne peut pas utiliser ici le développement limité de $(1+x)^a$ *puisque l'exposant dépend de* n. *On a*

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right).$$

Par la règle du produit termes à termes, on peut traiter séparément les deux termes de ce produit.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, *on a par continuité de la fonction exponentielle,* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = 1$ *d'où* $n^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
En utilisant $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, *on obtient que* $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = 0$. *Cette fois, on ne peut pas conclure à un équivalent puisque la limite est nulle. On a plus précisément* $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ *d'où*

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = e^{\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1.$$

Puis en posant $v_n = \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *on a* $e^{v_n} - 1 = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ *car* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. *D'où*

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = \frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi,

$$u_n = n^2 n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n^{\frac{1}{n}}(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

En particulier, la suite u *est convergente, de limite* 1.

4. Notion de suite extraite ; valeur d'adhérence

4.1. **Définitions et premiers exemples.** Considérons une playlist musicale qu'on écoute dans l'ordre en sautant certains morceaux. Le 5e morceau écouté est soit la 5e piste de la playlist soit un morceau indexé plus loin dans la liste (donc d'index plus grand ou égal à 5 mais jamais inférieur).

Définition. *On appelle* extractrice *toute fonction* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *qui est strictement croissante.*

Proposition 36. *Soit* φ *une extractrice. Alors pour tout* $n \geqslant 0$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Définition. *Soit* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *On appelle suite extraite de* u *(ou encore appelée* sous-suite de u*), toute suite du type* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$, *où* φ *est une extractrice.*

Proposition 37. *Soit* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *bornée. Toutes les suites extraites de* u *sont bornées.*

Proposition 38. *Soient* $u, v, w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Si* v *est extraite de* u *et* w *est extraite de* v, *alors* w *est une suite extraite de* u.

Proposition 39. *Soient* $u, v, w \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Soient* φ *et* ψ *deux extractrices telles que* $v = \left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ *et* $w = \left(v_{\psi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$. *Alors* w *est extraite de* u *par* $\varphi\circ\psi$ *: pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}.$$

Preuve : $\varphi\circ\psi$ comme composée de deux fonctions strictement croissantes est encore une extractrice.
Attention à l'ordre ! mieux vaut raisonner sur un seul terme.

Exemple(s). *Si* $v = (u_{2k})_k$ *et* $w = (v_{2n+1})_n$, *alors* $w = (u_{4n+2})_n$ *(car* $\varphi(\psi(n)) = \varphi(2n+1) = 4n+2$*).*
Si $v = (u_{2k+1})_k$ *et* $w = (v_{2n})_n$, *alors* $w = (u_{4n+1})_n$ *(car* $\varphi(\psi(n)) = \varphi(2n) = 4n+1$*).*

On s'intéresse naturellement à la convergence des suites extraites. Tout d'abord, on donne un nom à la limite d'une sous-suite.

Définition (Valeur d'adhérence)**.** *Soit* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *et* $\underline{\ell \in \mathbb{K}}$. *On dit que* ℓ *est une valeur d'adhérence de* u *si* ℓ *est la limite d'une sous-suite de* u.

Ainsi, une valeur d'adhérence est toujours finie (on exclut $\pm\infty$).
Lorsqu'une suite converge, l'étude de la convergence de ses suites extraites est particulièrement simple.

Proposition 40. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, alors toutes les suites extraites de u convergent vers ℓ.*

Preuve : Soit φ une extractrice. Il s'agit de montrer que la suite $u_\varphi = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Or, pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$. Donc en particulier, $|u_{\varphi(n)} - \ell| = |v_n - \ell| < \varepsilon$. Donc $v = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Corollaire 4. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors u n'est pas convergente.*

Preuve : Notons $\ell_1 \in \mathbb{K}$ et $\ell_2 \in \mathbb{K}$ les deux valeurs d'adhérence distinctes mentionnées dans l'énoncé. Par l'absurde, supposons que u converge. Notons $\ell \in \mathbb{K}$ sa limite. Alors par la Proposition 40, toutes les suites extraites de u convergent vers ℓ. On a donc $\ell_1 = \ell$ et $\ell_2 = \ell$, d'où $\ell_1 = \ell_2$. Absurde. Par conséquent u n'est pas convergente.

Exemple(s). *1. Une suite convergente n'a qu'une valeur d'adhérence et elle est égale à sa limite (c'est la proposition précédente).*

2. Les valeurs d'adhérences de $u_n = (-1)^n$ sont $+1$ et -1 (limites des suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$). Donc u ne converge pas.

3. La suite définie par $u_n = n(-1)^n$ n'a aucune valeur d'adhérence.

4. La suite donnée par $u_n = n(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ a une unique valeur d'adhérence, mais ne converge pas.

5. La suite $(e^{in\frac{2\pi}{k}})_n$ pour $k \in \mathbb{N}$ admet k valeurs d'adhérence (racines k-ième de l'unité).

6. La suite $(\cos(n))_n$ admet l'intervalle $[-1, 1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence (admis). De même pour $(\sin(n))_n$.

4.2. **Extraction sous contraintes.** Nous formalisons ici l'étude de la construction / existence d'une extractrice sous certaines contraintes. Ce problème apparaît dans de nombreuses situations, il est donc important de bien comprendre les résultats qui suivent.

Proposition 41 (Existence d'extractrice sous contrainte). *1. Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$. Il existe une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_n$.*

2. Soit $I \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Il existe une extractrice φ telle que $\operatorname{Im}\varphi \subset I$.

Preuve : 1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\text{il existe } \varphi : [\![0, n]\!] \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante.}$$

Initialisation : comme I_0 est infini, il est non vide donc il existe $n_0 \in I_0$ et on peut poser $\varphi(0) = n_0$.
Héridité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe $\varphi : [\![0, n]\!] \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Comme I_{n+1} est infini, il existe $k \in I_{n+1}$ tel que $k > \varphi(n)$. On prolonge alors φ avec $\varphi(n+1) = k$. Ceci termine la récurrence.
2) C'est un cas particulier avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = I$. □

Exemple(s). *Pour montrer l'existence d'une sous-suite de u strictement positive, on cherche une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} > 0$. On réexprime cette contrainte sous la forme "$\varphi(n) \in I_n$" : on cherche φ telle que $\varphi(n) \in I_n = \{p \in \mathbb{N} \,/\, u_p > 0\} = I$. Si un tel ensemble est infini, c'est gagné.*
Pour une sous-suite positive qui décroît plus vite que $\frac{1}{n}$: $I_n = \{p \in \mathbb{N} \,/\, 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{n}\}$.

Application : Montrons que toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ non majorée admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
Méthode : pour construire une sous-suite qui tend vers $+\infty$, on cherche une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. On réexprime cette contrainte sous la forme "$\varphi(n) \in I_n$" : on cherche φ telle que $\varphi(n) \in I_n = \{p \in \mathbb{N} : u_p \geqslant n\}$ (ou au moins APCR).
Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_n = \{p \in \mathbb{N} : u_p \geqslant n\}$ est infini. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que I_n soit fini. Si I_n est vide, alors la suite est majorée par n. Sinon, I_n étant fini et non vide admet un majorant. Notons le N. Alors pour tout $p \geqslant N$, $u_p < n$. Autrement dit, la suite est majorée à partir d'un certain rang, donc majorée.
D'après la proposition précédente, il existe donc φ une extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. Par passage à la limite dans l'inégalité, on déduit que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

4.3. **Théorème de Bolzano-Weierstrass.** La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un exemple de suite bornée qui n'est pas convergente. Par contre, cette suite admet au moins une sous-suite qui converge. C'est une illustration d'un des théorèmes fondamentaux de l'analyse.

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge.*

Preuve : Soit u une suite bornée. Ainsi il existe $a < b$ deux réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$. On va construire une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-intervalles de $[a, b]$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = [a_n, b_n] \subset [a, b]$ et les propriétés suivantes sont satisfaites :

— $J_{n+1} \subset J_n$ (*on parle de segments emboités*),

— la longueur de J_n est égale à $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,

— J_n contient des valeurs u_k de la suite u pour une infinité d'entiers naturels k.

On construit cette suite d'intervalles par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et donc $J_0 = [a, b]$. Le principe est de procéder par dichotomie : coupons l'intervalle $[a, b]$ en deux en considérant les sous-intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$. Parmi ces deux intervalles (de longueur $\frac{b-a}{2}$), il en existe au moins un qui contient des valeurs u_k pour une infinité d'indices k (sinon, les deux intervalles, et donc la réunion $[a, b]$, ne contiendrait des u_k pour un nombre fini d'indices k, ce qui est absurde). S'il s'agit de $[a, \frac{a+b}{2}]$, on pose alors $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$ et si c'est l'autre, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$. Puis on définit $J_1 = [a_1, b_1]$ et on a bien, en plus de la propriété sur les termes de la suite u, que

— $J_1 \subset J_0$,

— la longueur de J_1 est $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

Hérédité. L'idée est d'itérer ce processus de construction par dichotomie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que l'on a $J_n = [a_n, b_n]$ un intervalle de taille $\frac{b-a}{2^n}$ contenant des éléments de la suite u pour une infinité d'indices. On a $J_n = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$, donc l'un (au moins) de ces segments contient des éléments de la suite u pour une infinité d'indices. Si c'est $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Ainsi $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient bien des éléments de la suite u pour une infinité d'indice et de plus

— $J_{n+1} \subset J_n$,

— la longueur de J_{n+1} est $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Ceci conclut la récurrence.
La construction de cette suite d'intervalles $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit donc en particulier deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset J_n = [a_n, b_n]$,

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, ainsi $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par conséquent les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$.
Terminons la preuve du théorème et montrons finalement que u admet une sous-suite qui converge vers ℓ. Pour cela, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, u_k \in J_n\},$$

qui représente donc l'ensemble des indices des éléments de la suite u appartenant à $J_n = [a_n, b_n]$. On sait donc, par construction de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Ainsi, grâce à la Proposition 41, il existe φ extractrice tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_n$ i.e. $u_{\varphi(n)} \in J_n$. On a par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n,$$

et comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ, par le théorème des gendarmes on obtient que la sous-suite (de u) $u_\varphi = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

Corollaire 5. *Toute suite complexe bornée admet une sous-suite qui converge.*

Preuve : Si $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée, $x = \mathfrak{Re}\, z$ et $y = \mathfrak{Im}\, z$ aussi.
Exemple : $x_n = y_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$. Alors $x_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $y_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $z_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + i$.
On serait tenté après cet exemple d'appliquer le théorème à x et y en parallèle, mais supposons que $(x_{2n})_n$ et $(y_{2n+1})_n$ soient les suites obtenues. Comment reconstruire une sous suite de z (comment reconstruire des points du plan complexe, si on a à chaque fois qu'une seule coordonnée) ? Impossible.
Par application du théorème, il existe une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge. La suite $(y_{\varphi(n)})_n$ n'est a priori pas convergente, mais elle est bornée puisque extraite d'une suite bornée. Ainsi par application du théorème, il existe une extractrice ψ telle que $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge. Et de même, par extraction d'une suite convergente, $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge.
Finalement, $(z_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge car ses parties réelles et imaginaires convergent. $\square$

Proposition 42. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est bornée et a une unique valeur d'adhérence, alors u est convergente.*

Voir TD.

5. Suites de Cauchy, complétude de $\mathbb{R}$

La dernière notion abordée dans ce chapitre est celle de suite de Cauchy.

Définition. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est de Cauchy si*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$,

ou de manière équivalente

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, tout $p \geqslant 0$, $|u_n - u_{n+p}| < \varepsilon$,

Intuitivement, la notion de suite de Cauchy dit la chose suivante : u est de Cauchy si les termes de la suite deviennent arbitrairement proches les uns des autres, quitte à attendre suffisamment longtemps. Un exemple de suite de Cauchy est fourni par les suites convergentes.

Proposition 43. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est convergente, alors u est de Cauchy.*

Preuve : Si u est une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| \leqslant |u_p - l| + |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Nous venons donc de montrer que u est de Cauchy.
Il s'avère que dans le cas de suites réelles, la réciproque est vraie. C'est l'objet du théorème important suivant :

Théorème 5. *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si u est de Cauchy, alors u est convergente (dans $\mathbb{R}$).*

Remarque. *Ce résultat est intéressant dans la mesure où il permet de montrer qu'une suite réelle converge, sans même avoir la moindre idée de sa limite !*

Remarque. *Les espaces métriques où les suites de Cauchy sont convergentes sont appelés* espaces complets. *Le résultat précédent dit donc que $\mathbb{R}$ est complet. La notion d'espace complet sera étudiée en détail l'an prochain en L3.*
Il faut noter qu'il y a des espaces qui ne sont pas complets : par exemple l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 10^{-n}E(10^n\sqrt{2})$ (i.e. la suite des approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$) est une suite de rationnels et on peut vérifier qu'elle est de Cauchy. Elle est convergente dans $\mathbb{R}$ (vers $\sqrt{2}$). Cependant elle ne converge donc pas dans $\mathbb{Q}$, puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. Il y a donc des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne convergent pas dans $\mathbb{Q}$.

Pour prouver le Théorème 5, nous avons besoin de deux résultats intermédiaires.

Proposition 44. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Preuve : Soit u une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| < 1$. En particulier, pour tout $p \geqslant n_0$, $|u_p - u_{n_0}| < 1$ et donc $|u_p| \leqslant |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$. Par conséquent, u est bornée par $M := \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|\}$.

Proposition 45. *Toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite qui converge est convergente.*

Preuve : Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont on suppose quelle est de Cauchy et qu'elle admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrons que toute la suite u converge vers ℓ. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_2$, $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors pour tout $n \geqslant n_0 = \max(n_1, n_2)$,

$$|u_n - l| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

car $n \geqslant n_2$ et $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_2$, et $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_1$ (on a utilisé la Proposition 36). Nous venons donc de prouver que u est convergente, de limite ℓ.
Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 5.

Preuve (Démonstration du Théorème 5) **:** Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Par la Proposition 44 elle est donc bornée. Par Théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 4), elle admet une sous-suite convergente. Par la Proposition 45, toute la suite est elle-même convergente.

6. Synthèse : comment montrer qu'une suite converge (ou ne converge pas) ?

Résumons les outils que nous avons à notre disposition pour l'étude de la convergence d'une suite.

6.1. **Comment montrer qu'une suite réelle u est convergente ?** Parmi les outils que nous avons vus dans ce chapitre, nous pouvons mentionner les méthodes suivantes :

1. si on a une idée préalable de la limite potentielle ℓ de u, revenir à la Définition 2.1 et prouver à la main que la suite converge vers ℓ,
2. par utilisation des opérations usuelles sur les limites (cf. § 2.4),
3. par encadrement, en utilisant le Théorème des gendarmes (Proposition 1),
4. si la suite est croissante (resp. décroissante), en montrant qu'elle est majorée (resp. minorée) (cf. Théorème 3),
5. en construisant une autre suite adjacente à u (cf. Proposition 22),
6. par calcul, en utilisant des développements limités de fonctions usuelles (cf. § 3),
7. en montrant que u est bornée, avec une unique valeur d'adhérence (cf. Proposition 42)
8. en montrant que u est de Cauchy (cf. Théorème 5).

Remarque. *On notera que les items 4, 5, 7, 8 ne nécessitent pas de connaissance préalable de la limite : on prouve l'existence d'une limite sans la connaître !*

6.2. **Comment prouver qu'une suite n'est pas convergente ?** Parmi les méthodes possibles, nous avons à notre disposition :

1. en prenant la négation de la définition,
2. par encadrement (minoration par une suite qui tend vers $+\infty$ ou majoration par une suite qui tend vers $-\infty$) (cf. Proposition 19),
3. si u est croissante (resp. décroissante), en montrant qu'elle n'est pas majorée (resp. minorée), (cf. Proposition 20),
4. en exhibant deux sous-suites de u qui convergent vers des limites distinctes (cf. Corollaire 4).