Licence 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications, 2024-2025
ANALYSE 3 - NOTES DE COURS

L'objectif de ce cours est de formaliser rigoureusement les notions de base de l'analyse, de se concentrer sur les démonstrations de leurs propriétés élémentaires et de démystifier ces démonstrations !

Programme - Partie I :
Chapitre introductif : La démonstration en langage mathématique
Chapitre 1 : Propriétés usuelles des réels
Chapitre 2 : Suites réelles et complexes

> *La lecture rend un homme complet, la conversation rend un homme alerte, et l'écriture rend un homme précis. C'est pourquoi, si un homme écrit peu, il doit avoir une bonne mémoire ; s'il cause peu, il doit avoir l'esprit vif ; et s'il lit peu, il doit avoir beaucoup de ruse, pour paraître savoir ce qu'il ne sait pas.*
>
> Francis Bacon, philosophe anglais, XVIIe siècle.

L'écriture par soi-même (et non le recopiage), de raisonnements soigneusement rédigés, n'a pas d'égal pour se forger des idées claires et précises.

Entre 1945 et 1946, Picasso dessine onze taureaux. Il cherche les lignes saillantes qui caractérise le taureau. Son travail exploratoire passe par une expérimentation concrète, par une extériorisation de la pensée dans l'objet réel du dessin sur une feuille. Ces onze dessins illustrent que même pour penser sous forme d'image, on recourt à une extériorisation sur un support matériel. De même, on ne fait pas des mathématiques de tête. On ne peut se contenter de lire des mathématiques, on les fait en s'investissant avec son corps, par l'écriture. La trace écrite permet de raviver ses propres pensées des jours précédents et inscrit plus durablement le travail en mémoire.

Que ce soit grâce au miroir ou à la vidéo, le danseur, la joueuse de tennis ou tout autre sportif, perfectionne son geste en le regardant. Le joueur de go, d'échec, de poker ou de jeux vidéo revisionne ses parties pour les travailler. Le ou la mathématicienne ne fait pas exception, il perfectionne ses raisonnements par l'écriture pour se voir penser, pour être autocritique et pour gagner en précision.

Le volume horaire d'une formation à l'université est bien inférieur à celui en IUT ou en classe préparatoire. Vous êtes donc en autonomie sur la moitié de votre temps de travail. Pour vous aider à développer cette autonomie, vous aurez avec les premières feuilles de TDs, des feuilles d'exercices supplémentaires. Il est essentiel, dans les autres matières également, de prendre l'habitude de faire d'autres exercices que ceux vus en TDs.
Un travail irrégulier, concentré la veille des examens, est non seulement un risque pour le passage de l'examen mais surtout la garantie de mal maîtriser les connaissances l'année prochaine. Pensez l'apprentissage sur l'ensemble de la formation universitaire. `https://www.youtube.com/watch?v=RVB3PBPxMWg&ab_channel=ScienceEtonnante`

La formation universitaire est très (trop) spécialisée. Soyez curieux du monde extérieur, développer votre curiosité sur des sujets variés. Le premier bénéfice en sera d'apprendre à mieux vous connaître vous-même et vous aidera à construire un projet d'orientation.
Profitons-en pour rappeler que l'université offre une large palette d'activités sportives !

Chapitre introductif : La démonstration en langage mathématique

Une démonstration se construit avec des axiomes (faits admis), des règles de déduction et de calcul. Par exemple, si "A" est vraie et "A implique B" est vraie, alors "B" est vraie.
En pratique, l'énonciation et la rédaction d'une démonstration utilisent de plus des définitions et des notations (par exemple, π, $\sqrt{2}$, sin, $n!$).
Considérons les mots : positif, négatif, croissant, décroissant, fonction, dérivée. Comment exprimer sans ce vocabulaire qu'une fonction dont la dérivée est positive est croissante ? On peut le faire avec des

périphrases et des équations mais la perte en lisibilité est considérable. Les définitions enrichissent notre langage et donc le support de nos connaissances et de notre capacité à raisonner. Plus une définition est maîtrisée, plus on a d'exemples associés à cette définition, plus on facilite notre capacité à raisonner avec cette définition.

> *Quels sont les êtres mathématiques auxquels nous attribuons ce caractère de beauté et d'élégance et qui sont susceptibles de développer en nous une sorte d'émotion esthétique ? Ce sont ceux dont les éléments sont harmonieusement disposés, de façon que l'esprit puisse sans effort en embrasser l'ensemble tout en pénétrant les détails.*
>
> Science et méthode, Henri Poincaré, 1908.

Il est donc fondamental de bien connaître les définitions et propositions du cours pour faire les exercices. La fiche exemple sur la définition d'une fonction croissante illustre comment aller au-delà de la simple connaissance de l'énoncé d'une définition.

1. Quantificateurs et négation d'une assertion

La démonstration d'une contraposée et le raisonnement par l'absurde demande de savoir exprimer la négation d'une assertion.

Énoncé	Négation
non P	P
P ou Q	non P et non Q
P et Q	non P ou non Q
$P \Rightarrow Q$	P et non Q
$\forall x \in X, P(x)$	$\exists x \in X,$ non $P(x)$
$\exists x \in X, P(x)$	$\forall x \in X,$ non $P(x)$

La négation de P se note aussi $\neg P$.

Exemple(s). *L'expression littérale "il existe deux entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2}$ soit égal à leur quotient" s'écrit en langage formel*

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad (\textit{ou concisément } \sqrt{2} \in \mathbb{Q})$$

et sa négation

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} \neq \frac{p}{q} \qquad (\textit{ou concisément } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}).$$

La première assertion est fausse et sa négation est donc vraie.

Rédaction : *ni quantificateur, ni symboles d'implication et d'équivalence au milieu d'une phrase.*

Ne pas confondre
- la **contraposée** de "$P \Rightarrow Q$" qui est "non $Q \Rightarrow$ non P"
- la **négation** de "$P \Rightarrow Q$" qui est "P et (non Q)"

Une assertion et sa contraposée ont la même valeur de vérité ("$P \Rightarrow Q$" est vraie si et seulement si "non $Q \Rightarrow$ non P" est vraie).
Une assertion et sa négation ont des valeurs de vérité opposées ("$P \Rightarrow Q$" est vraie si et seulement si "P et (non Q)" est fausse).
Remarque : dire que "$P \Rightarrow Q$" est vraie n'est pas équivalent à supposer P vraie.
Considérons l'exemple suivant :
Soit $x \in \mathbb{R}$. L'assertion

$$x > 1 \ \Rightarrow \ x > 0$$

est vraie. Cela ne dit pas pour autant que $x > 1$.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons l'assertion : **Si** u est croissante et u_0 est positif, **alors** u est positive. C'est une implication (si P alors Q) qui s'écrit en langage formel

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1} \text{ et } u_0 \geqslant 0) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0. \tag{1}$$

La contraposée est (si non Q alors non P) : si u n'est pas positive, alors u n'est pas croissante ou u_0 est strictement négatif. Elle s'écrit en langage formel

$$\exists n \in \mathbb{N}, u_n < 0 \Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1} \text{ ou } u_0 < 0).$$

La négation est : u est croissante et u_0 est positif et u n'est pas positive. Elle s'écrit

$$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}) \text{ et } u_0 \geqslant 0 \text{ et } \exists n \in \mathbb{N}, u_n < 0.$$

Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité. La négation a inversement une valeur de vérité opposée. On peut donc de manière équivalente démontrer que, pour cet exemple, l'implication est vraie ou que sa contraposée est vraie ou que sa négation est fausse.
Démontrons l'implication (1). La méthode générale, dite de déduction, consiste à supposer la prémisse vraie : Supposons u croissante et u_0 positif,
à la transcrire en langage formel : c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1} \text{ et } u_0 \geqslant 0.$$

à identifier clairement, au moins au brouillon, la conclusion de l'implication que l'on doit alors démontrer et à la transcrire en langage formel :
Montrons que u est positive, c'est-à-dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0.$$

Puis à combiner nos hypothèses pour démontrer cette conclusion. On remarque ici que la propriété à démontrer est de la forme, "pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$" ce qui incite à raisonner par récurrence :
Puisque u est croissante, on a par récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n$$

or $0 \leqslant u_0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n.$$

La puissance du langage mathématique permet parfois de dérouler des démonstrations *comme un calcul*, presque *sans réfléchir*. Il est néanmoins essentiel d'avoir en tête en parallèle, autant que possible, une interprétation de la preuve. Par souci de concision, la rédaction des démonstrations laisse en général peu de place à cette interprétation et aux heuristiques, il faut donc prendre le réflexe d'y penser. Ici par exemple, une reformulation de la preuve dans le langage courant peut être : "la suite est croissante, donc chaque terme est plus grand que le précédent, donc plus grand que le premier, or celui-ci est positif donc la suite est positive".

2. Ordre des quantificateurs

Le langage logique lève les ambiguïtés éventuelles du langage courant :

Tous les enfants aiment quelqu'un.

En effet, l'assertion

$$\forall x, \exists y, x \text{ aime } y$$

indique que y dépend de x (par exemple, y est un parent de x) et l'assertion

$$\exists y, \forall x, x \text{ aime } y$$

exprime que y ne dépend pas de x (par exemple, y est le Père Noël)

◇ L'assertion suivante est-elle vraie ?

Tout nombre est inférieur à un certain nombre.

On ne peut répondre sans lever l'ambiguïté du langage. De plus, pour être rigoureux, on précisera toujours[1] l'espace d'appartenance des variables considérées (prenons par exemple ici l'ensemble des réels). L'assertion

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$$

est vraie. Montrons-le. Pour démontrer une assertion de la forme

$$\forall x \in E, P(x)$$

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on s'autorisera à introduire une variable réelle ou un entier par une inégalité. Par exemple : "$\forall \varepsilon > 0$" signifiant implicitement "$\forall \varepsilon \in]0, +\infty[$" ou "$\forall n \geqslant 1$" signifiant implicitement "$\forall n \in \mathbb{N}^*$".

où E est un ensemble et P est une propriété qui dépend de x, on considère un x quelconque dans E et on montre $P(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.
Pour montrer l'existence d'un objet mathématique, on le construit explicitement ou on utilise un théorème qui garantit son existence.
Posons $y = x + 1$, alors y est bien défini dans $\mathbb{R}$ et on a bien $x < y$.

En revanche, l'assertion suivante (où l'ordre d'introduction des variables a été inversé)

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y \tag{2}$$

est fausse car sa négation

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \geqslant y$$

est vraie. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, en posant $x = y$, on a bien $x \geqslant y$.
Si on ne pense pas à passer par la négation pour simplifier la démonstration, on peut aussi bien raisonner par l'absurde : Supposons l'assertion (2) vraie et soit $y \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < y$. En posant alors $x = y$ (ou $x = y + 1$), on obtient une contradiction puisque $x \in \mathbb{R}$ et pourtant $x < y$ est faux.

$\diamond$ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'assertion

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n = a$$

dit que pour tout entier relatif de a, il existe un indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = a$. Autrement dit, u est surjective sur $\mathbb{Z}$.
Q bonus : est-ce qu'une telle suite existe ?
L'assertion

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{Z}, u_n = a$$

dit qu'un élément de la suite vaut une infinité de valeurs, ce qui est contraire à la définition d'une suite.
Il est toujours possible d'inverser deux $\forall$ (ou deux $\exists$) entre eux : les énoncés suivants sont équivalents

$$\forall x \in X, \forall y \in Y,\ P(x, y),$$
$$\forall y \in Y, \forall x \in X,\ P(x, y).$$

Par exemple, les énoncés suivants sont équivalents :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, n \neq p \Rightarrow u_n \neq u_p$$
$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \neq p \Rightarrow u_n \neq u_p$$

signifiant que la suite ne prend jamais 2 fois la même valeur.
C'est pourquoi on s'autorise à écrire par abus de notation

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, n \neq p \Rightarrow u_n \neq u_p\,.$$

Réponse Q bonus : oui, par exemple la suite définie par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = -n$.

3. Ensembles et quantificateurs

Définition. *Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On définit les sous-ensembles de E suivants*

$$A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$$
$$E \setminus A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$$

et les relations entre ensembles

$$\begin{array}{lll} A \subset B & \text{si} & \forall a \in A, a \in B \\ A = B & \text{si} & (A \subset B \text{ et } B \subset A) \\ A \subsetneq B & \text{si} & (A \subset B \text{ et } A \neq B) \\ A = \emptyset & \text{si} & \forall x \in E, x \notin A\,. \end{array}$$

En particulier, A est non vide si

$$\exists x \in E,\ x \in A\,.$$

Pour montrer qu'un ensemble est non vide, il faut donc construire (explicitement ou implicitement) un élément de cet ensemble.

Exemple(s). *Soient $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $B = \{a+1 \,/\, a \in A\}$. Montrer que B est non vide.*
Preuve : Puisque $A \neq \emptyset$, il existe $a \in A$. Alors $a+1 \in B$ donc B est non vide.

Définition. *Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E indexée par un ensemble I. On définit les sous-ensembles suivants*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in I, x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Dans la définition précédente, I est quelconque, fini ou infini. Par exemple, $I = [0,1]$, $I = \{1,2,3,4,5\}$ ou $I = \mathbb{N}$. Dans les deux derniers cas, on pourra noter l'union : $\bigcup_{i=1}^{5} A_i$, respectivement $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$.

Exemple(s). *Montrer que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[$ et $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$ sont non vides.*

Preuve : Puisque $\frac{1}{2} \in]0,1[$ et $]0,1[\subset A$ (donné pour $n=0$), $\frac{1}{2} \in A$. Ainsi, A est non vide.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ donc $0 \in B$. Ainsi, B est non vide.

Ensemble vide. L'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. Soit P une propriété dépendant d'une variable $x \in E$ pour un ensemble E quelconque.
L'assertion suivante est toujours vraie :

$$\forall x \in \varnothing, P(x). \tag{3}$$

L'assertion suivante est toujours fausse :

$$\exists x \in \varnothing, P(x). \tag{4}$$

En effet, l'assertion "$\exists x \in \varnothing$" est fausse par définition de l'ensemble vide donc l'assertion (4) est fausse. De plus, la négation de l'assertion (3) est

$$\exists x \in \varnothing, \neg P(x)$$

qui est donc également fausse par le même argument. Ainsi, (3) est vraie.

4. Méthodes de démonstration

Démonstration d'un énoncé de type "Pour tout x, $P(x)$".
a) Montrons que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \implies \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y.$$

À première vue on pourrait se demander si cet énoncé est de la forme
(i) $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y) \implies (\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)$
ou de la forme
(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ (x < y \implies \exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)$.
Or dans le cas (i), les variables x et y du 2e bloc ne sont pas introduites. Seul l'énoncé (ii) est correct, ce qui rend les parenthèses optionnelles.
Preuve : On doit montrer pour tout x et y une propriété qui dépend de x et y. On commence par introduire x et y. La propriété étant une implication, on peut raisonner par déduction et donc supposer la prémisse vraie. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et supposons que $x < y$.
On doit maintenant construire un z vérifiant $x < z < y$. On peut raisonner graphiquement, se donner un ou deux exemples concrets ($x = 0, y = 1$) pour faire une proposition et voir si celle-ci se généralise. La moyenne de x et y est toujours définie et satisfait l'encadrement dès que $x < y$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$, alors $z \in \mathbb{R}$ et $x < z < y$. Il existe donc bien toujours un réel strictement compris entre x et y.

b) Montrons que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists a,b\in\mathbb{R},\ a<b \text{ et } \forall x\in]a,b[, E(x)=n\,.$$
Il n'y a ici encore qu'une possibilité pour placer des parenthèses :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists a,b\in\mathbb{R},\ (a<b \text{ et } \forall x\in]a,b[, E(x)=n)\,.$$
Preuve : Une assertion de la forme "Pour tout n, $P(n)$" appelle souvent à une démonstration par récurrence. Cependant, la propriété au rang n, $P(n)$, n'apporte parfois aucune information sur $P(n+1)$ et il faut raisonner autrement. Parfois, la démonstration directe est juste plus simple que la démonstration par récurrence. Soit $n\in\mathbb{N}$.
On doit construire un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, qui peut dépendre de n, dont tous les éléments ont une partie entière égale à n. Posons $a=n$ et $b=n+1$, alors on a bien pour tout $x\in]a,b[$, $E(x)=n$.

Démonstrations d'inclusion et d'égalité entre ensembles.
c) Soit $I=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1\right]$. Montrons que
$$]0,1]\subset I.$$
Preuve : Il est essentiel de bien connaître la définition en écriture formelle d'une inclusion pour savoir comment appréhender la rédaction de la preuve. A est inclus dans B si
$$\forall a\in A, a\in B.$$
Démontrer une inclusion se ramène donc le plus souvent à démontrer un énoncé de type "Pour tout x, $P(x)$".
Soit $x\in]0,1]$. Montrons que $x\in I$.
Par définition, $x\in I$ si il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x\in\left[\frac{1}{n},1\right]$. Raisonnons graphiquement en nous donnant un x sur l'intervalle $]0,1]$ et en représentant sur ce même intervalle la suite $(\frac{1}{n})_n$. Puisque cette suite tend vers 0 et que $x>0$, à partir d'un certain rang, les termes de cette suite sont plus petits que x. Puisque nous n'avons pas encore revu la notion de limite, explicitons un terme plus petit que x.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a (puisque $x>0$)
$$\frac{1}{n}\leqslant x \quad\iff\quad \frac{1}{x}\leqslant n\,.$$
Par définition de la partie entière, $E(\frac{1}{x})\leqslant\frac{1}{x}<E(\frac{1}{x})+1$. Ainsi pour $N=E(\frac{1}{x})+1$, on a $N\in\mathbb{N}^*$ (car $x>0$) et $\frac{1}{N}\leqslant x$. De plus, $x\leqslant 1$ car $x\in]0,1]$ donc $x\in\left[\frac{1}{N},1\right]$ donc $x\in I$. Finalement, $]0,1]\subset I$.

d) Montrons que $I=]0,1]$.
Preuve : Par définition, deux ensembles A et B sont égaux si
$$A\subset B \quad\text{et}\quad A\supset B.$$
On dit qu'on démontre l'égalité par double inclusion.
($\supset$) D'après la démonstration précédente, on a bien $]0,1]\subset I$.
($\subset$) Soit $x\in I$. Par définition de I, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $x\in\left[\frac{1}{n},1\right]$. Or $\left[\frac{1}{n},1\right]\subset]0,1]$ donc $x\in]0,1$. Ainsi, $I\subset]0,1]$.
Ceci démontre que $I=]0,1]$.

Fin Séance 1 - 2024

Petit catalogue de méthodes de démonstration.

1. Démonstration par récurrence :
s'applique à un énoncé de la forme "montrer $P(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$".

2. Démontrer une implication par déduction :
pour montrer $P\Rightarrow Q$, on suppose P et on en déduit Q.

3. Démontrer une implication par contraposée :
puisque "$P\Rightarrow Q$" équivaut à "non $Q\Rightarrow$ non P",
on suppose non Q et on en déduit non P.

4. Démontrer une propriété par l'absurde :
pour montrer P, on suppose non P et on en déduit une contradiction ;
pour montrer "$P\Rightarrow Q$", on suppose "P et non Q" et on en déduit une contradiction.

5. Démontrer une équivalence par double implication :
"$P \iff Q$" équivaut à "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$".

6. Démontrer une égalité par double inégalité : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
$x = y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $x \geqslant y$.
Démontrer une égalité avec quantificateur :

$$x = y \iff x - y = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, |x - y| \leqslant \varepsilon\,.$$

7. Démontrer une égalité d'ensembles par double inclusion :
$A = B$, avec A, B deux ensembles, est vrai si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

8. Démontrer une assertion de type "$\forall x \in X, P(x)$" :
Rédaction : on introduit un x "Soit $x \in X$" ou "Posons/Prenons/Considérons $x \in X$" puis on montre $P(x)$. Le x introduit étant quelconque, on aura montré $P(x)$ pour tout $x \in X$.

9. Démontrer une assertion de type "$\exists x \in X, P(x)$" :
on construit un exemple explicite x tel que $P(x)$ est vrai.

Exemple(s). *Démonstration d'une égalité d'ensembles par double inclusion :*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. On note $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+$.
($\subset$) Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Montrons que $y \in \mathbb{R}_+$. Par définition de $\operatorname{Im} f$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $y = x^2 \geqslant 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_+$,
($\supset$) Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $y \in \operatorname{Im} f$. Il faut construire un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Posons $x = \sqrt{y}$, qui est bien défini puisque $y \geqslant 0$. Ainsi, $y = x^2 = f(x)$ donc $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{Im} f$.
Finalement, $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\operatorname{Im} f \supset \mathbb{R}_+$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+$.

Un problème à démontrer est introduit par un énoncé qui contient, la plupart du temps, des hypothèses **nécessaires** à la validité du résultat à démontrer et donc nécessaires à sa démonstration.
Les différentes formulations du même problème suivantes illustrent que des hypothèses sont souvent "**cachées**" dans l'énoncé en amont de la question.

Exemple(s). *a) Soient f et g sont deux fonctions* **croissantes**.
Montrer que $f + g$ est croissante. (montrer une propriété)

b) Montrer que si f et g sont deux fonctions croissantes, alors $f + g$ est croissante. (montrer une implication)

c) Soient f et g sont deux fonctions. Montrer que si f et g sont croissantes, alors $f + g$ est croissante. (montrer une implication)

d) Soit f une fonction **croissante**.
Montrer que si g est une fonction croissante, alors $f + g$ est croissante. (montrer une implication)

Donnons à titre d'exemple un énoncé d'équivalence entre deux propriétés :

Exemple(s). *Montrer qu'une fonction f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante.*

Chapitre 1 : Propriétés usuelles des réels

1. Relation d'ordre

⋄ On admet dans ce cours la définition des nombres réels et celles des opérations d'addition et de multiplication (lois internes). On admet que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est stable par addition et multiplication, que tout élément admet un inverse pour l'addition et que tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication. Hors-programme : plus précisément, $\mathbb{R}$ est un corps.
⋄ On admet que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ qui vérifie

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$, (réflexivité)
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (transitivité).

Cette relation d'ordre est totale :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on note $x < y$ si et seulement si "$x \leqslant y$ et $x \neq y$".

Remarque. ⋄ *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notons le $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est muni d'une relation d'ordre, définie pour tout $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $f \leqslant g$ si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)\,.$$

Cette relation n'est pas totale : si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$ alors on n'a ni $f \leqslant g$, ni $g \leqslant f$.
⋄ *En logique, la relation d'implication est aussi réflexive et transitive. Pour toutes propositions P, Q et R, on a $P \Rightarrow P$ et*

$$(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \ \Rightarrow\ (P \Rightarrow R)\,.$$

Elle n'est ni totale, ni antisymétrique ($P \Leftrightarrow Q$ n'implique pas $P = Q$).

Définition. *La fonction valeur absolue est définie par*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Proposition. *Soient $x, y, M \in \mathbb{R}$. Alors*

1. $|x| \leqslant M \iff (x \leqslant M$ et $-x \leqslant M) \iff -M \leqslant x \leqslant M \iff |x| \in [-M, M]$
(on a nécessairement $M \geqslant 0$).

2. Inégalité triangulaire : $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

3. Inégalité triangulaire inverse : $||x| - |y|| \leqslant |x + y|$.

Preuve : 1. Pour montrer un ensemble d'équivalences, par exemple $P_1 \iff P_2 \iff P_3$, on peut se limiter à montrer une boucle d'implications, par exemple $P_2 \implies P_1 \implies P_3 \implies P_2$. En effet, une implication manquante comme par exemple $P_3 \implies P_1$ se déduit de $P_3 \implies P_2 \implies P_1$ par transitivité (où $P_3 \implies P_2 \implies P_1$ signifie $P_3 \implies P_2$ et $P_2 \implies P_1$).
($P_1 \Rightarrow P_2$) Supposons que $|x| \leqslant M$. Alors si $x \geqslant 0$, $-x \leqslant x = |x| \leqslant M$ et si $x \leqslant 0$, $x \leqslant -x = |x| \leqslant M$. Dans les deux cas, $x \leqslant M$ et $-x \leqslant M$.
($P_2 \Rightarrow P_3$) Supposons que $x \leqslant M$ et $-x \leqslant M$. Alors, en multipliant par -1, la seconde inégalité donc $x \geqslant -M$ d'où $-M \leqslant x \leqslant M$.
($P_3 \Rightarrow P_4$) Supposons $-M \leqslant x \leqslant M$. Alors, $M \geqslant -x \geqslant -M$. Or $|x| = x$ ou $|x| = -x$ donc dans les deux cas, $-M \leqslant |x| \leqslant M$, *i.e.* $|x| \in [-M, M]$.
($P_4 \Rightarrow P_1$) Supposons que $|x| \in [-M, M]$. Alors $|x| \leqslant M$.

2. Voir TD

3. Montrons l'inégalité triangulaire inverse.
On a $|x| - |y| \leqslant |x + y| \iff |x| \leqslant |x + y| + |y|$. Or par inégalité triangulaire : $|x| = |x + y + (-y)| \leqslant |x + y| + |y|$. Par symétrie, on a de même, $|y| - |x| \leqslant |x + y|$ d'où l'inégalité triangulaire inverse.

Définition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on admet l'existence d'un unique entier relatif, noté $E(x)$, vérifiant :*

$$\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1.$$

On appelle $\mathrm{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction partie entière.

Proposition.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{E}(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}.$$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons l'équivalence par double implication.
($\Rightarrow$) Si $E(x) = x$, alors puisque $E(x) \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$.
($\Leftarrow$) Si $x \in \mathbb{Z}$, alors l'entier relatif $n = x$ satisfait $n \leqslant x < n + 1$. Par unicité, $E(x) = n = x$.

Lemme. *(dit pour ce cours Lemme de réécriture) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a*

1. $x < y \iff \exists \varepsilon > 0,\ x + \varepsilon = y$
2. $x < y \iff \exists \varepsilon > 0,\ x + \varepsilon < y$
3. $x \leqslant y \iff \exists \varepsilon \geqslant 0,\ x + \varepsilon \leqslant y$
4. $x \leqslant y \iff \forall \varepsilon > 0,\ x < y + \varepsilon$.
5. $x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$.

[Résultats acquis] La preuve sera faite en TD mais par la suite vous pourrez utiliser sans justification ces jeux de réécriture (à moins qu'on en demande la démonstration explicite).

Lorsque l'on cherche à démontrer une propriété sur un ensemble fini de nombres réels, il est souvent commode de supposer qu'ils sont implicitement ordonnés. On s'autorisera dans la suite du cours des énoncés du type : "soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, quitte à permuter, on peut supposer $x \leqslant y \leqslant z$". Ces énoncés sont rendus rigoureux par la proposition suivante :

Proposition. *Soient $n > 1$ un entier et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On peut toujours réindexer ces nombres réels pour les trier par ordre croissant : il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$.*

Autrement dit, si on considère n nombres réels, on peut toujours les numéroter de 1 à n aléatoirement puis trouver une nouvelle numérotation pour les ordonner. On s'autorisera alors implicitement à dire dans la suite du cours qu'on ré-attribue la notation x_1 au premier, x_2 au deuxième, etc. ou pour $n = 2$, x au premier, y au deuxième.
Exemple de bijection : si $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, -1)$, on a $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant x_{\sigma(3)}$ lorsque $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$ et $\sigma(3) = 1$.

2. Notion d'intervalle

Définition. *Un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \in I$, $y \in I$ et $x \leqslant z \leqslant y$ alors $z \in I$. Soit encore, I est un intervalle si*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x, y \in I \textit{ et } x \leqslant z \leqslant y) \implies z \in I.$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \implies z \in I.$$

Par négation, un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ si

$$\exists x, y \in I, \exists z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \text{ et } z \notin I.$$

Exemple(s). *$\mathbb{R}$ est un intervalle car pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a toujours $z \in \mathbb{R}$ (tautologie).*
L'ensemble à un élément $\{5\}$ est un intervalle car pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $5 \leqslant z \leqslant 5$, on a $z = 5 \in \{5\}$.
$\mathbb{N}$ n'est pas un intervalle : on a $0, 1 \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
$\emptyset$ est un intervalle. En effet, $I = \emptyset$ n'est pas un intervalle si

$$\exists x, y \in \emptyset, \exists z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \textit{ et } z \notin \emptyset.$$

Or il est impossible d'exhiber une paire $x, y \in \emptyset$ donc il est impossible de construire un contre-exemple. Autrement dit, cette assertion, négation de l'assertion de la définition, est fausse. Ainsi, l'assertion initiale de la définition est vraie.

1. L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$, les ensembles suivants sont des intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z \leqslant b\}\,,\\
[a,b[&:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z < b\}\,,\\
]a,b] &:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z \leqslant b\}\,,\\
]a,b[&:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z < b\}\,.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont des intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
]-\infty,a] &:= \{z \in \mathbb{R},\ z \leqslant a\}\,,\\
]-\infty,a[&:= \{z \in \mathbb{R},\ z < a\}\,,\\
[a,+\infty[&:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z\}\,,\\
]a,+\infty[&:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z\}\,.
\end{aligned}$$

Ces ensembles sont les seuls intervalles de $\mathbb{R}$.

Lemme. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. S'il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$, alors $[a,b] \subset I$.*

Preuve : On traduit les hypothèses et on explicite les définitions : Puisque I est un intervalle, on a par définition

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in I\,.$$

On doit montrer une inclusion d'ensemble. On rappelle que $A \subset B$ si

$$\forall a \in A,\ a \in B\,.$$

Soit $x \in [a,b]$, alors $a \leqslant x \leqslant b$ donc $x \in I$ car $a, b \in I$ et I est un intervalle. Ainsi, $[a,b] \subset I$.

Proposition. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. $I \cap J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Méthode : une démonstration combine souvent

- L'intuition : elle n'est pas magique ! Elle se construit en reformulant avec ses propres mots l'énoncé, en s'aidant d'exemples et de dessins.
- Des automatismes : identifier le type d'assertion qu'on doit démontrer (équivalence, égalité, existence) et connaître les méthodes associées (double implication, double inégalité, construction d'un candidat) ; écrire en langage mathématique les hypothèses, les définitions et résultats éventuels du cours et chercher à intégrer à ces hypothèses les éléments de la conclusion (ne jamais perdre de vue le résultat à démontrer !).

Preuve : On traduit les hypothèses et on explicite les définitions :

$$I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in I \text{ et } x \in J\}$$
$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in I$$
$$\forall x, y \in J, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in J$$

Montrons que $I \cap J$ est un intervalle, *i.e.*

$$\forall x, y \in I \cap J, \forall z \in \mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in I \cap J\,.$$

Soient $x, y \in I \cap J$ et $z \in \mathbb{R}$ (pour montrer une propriété pour tout x, y, z, on introduit de telles variables).
Pour montrer une implication, on suppose que la prémisse est vraie : Supposons que $x \leqslant z \leqslant y$.
On utilise les hypothèses : Puisque $x, y \in I \cap J$, on a $x, y \in I$, d'où $z \in I$ car I est un intervalle. De même, $x, y \in J$ donc $z \in J$ car J est un intervalle. Ainsi, $z \in I \cap J$ et $I \cap J$ est bien un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition. *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x < y$, il existe une infinité de réels $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$.*

Preuve : L'énoncé est sous la forme d'une implication. Supposons que la prémisse est vraie (les variables sont déjà introduites par l'énoncé) : Supposons que $x < y$ et notons $L = \frac{y-x}{2} > 0$ la demi-longueur entre x et y. Considérons $u_n = x + \frac{L}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x < u_n$ (car $\frac{L}{n} > 0$) et $u_n < y$ car $u_n = x + \frac{y-x}{2n} < x + \frac{y-x}{1} = y$ (car $2n > 1$). Ainsi, $\{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}^*\} \subset]x, y[$. De plus, cet ensemble est infini car pour tout $n \neq n'$, $u_n \neq u_{n'}$.
On aurait pu considérer $v_n = y - \frac{L}{n}$ ou les suites des points médians : $u_n = x + \frac{y-x}{2^n}$ ou $v_n = y - \frac{y-x}{2^n}$ (cf TD).

On a donc montré que x et y peuvent être aussi proches que l'on veut, il existe toujours une infinité de réels entre eux.

Corollaire. *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points est un ensemble infini.*

Lemme. *Réécriture Soient $a, b, z \in \mathbb{R}$. On a*

$$a < z < b \iff \exists \varepsilon > 0,\ a < z - \varepsilon < z + \varepsilon < b,$$

soit encore

$$z \in]a, b[\iff \exists \varepsilon > 0,\ ]z - \varepsilon, z + \varepsilon[\subset]a, b[.$$

Preuve : Raisonnons graphiquement en traçant un intervalle $]a, b[$ sur la droite réelle : si on place ensuite z est très proche de a, il faut prendre ε plus petit que la longueur $z - a$ mais si on place z très proche de b, il faut prendre ε plus petit que la longueur $b - z$.
($\Rightarrow$) Supposons que $a < z < b$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}\min(z - a, b - z)$. Alors

$$a < z - \varepsilon < z < z + \varepsilon < b\,.$$

En effet, $\varepsilon > 0$ donc $z - \varepsilon < z < z + \varepsilon$. De plus, $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}(z - a)$ donc $z - \varepsilon \geqslant z - \frac{1}{2}(z - a) = \frac{1}{2}(a + z) > a$ (car $z > a$). De même, $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}(b - z)$ donc $z + \varepsilon < b$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]z - \varepsilon, z + \varepsilon[\subset]a, b[$$

alors puisque $\varepsilon > 0$, $z \in]z - \varepsilon, z + \varepsilon[$ donc $z \in]a, b[$.

3. Notions de majorant et de maximum

Définition. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*
1. M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$,
2. m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$,
3. A est majoré (resp. minoré) si A admet un majorant (resp. minorant).

Autrement dit, A est majoré si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \leqslant M.$$

A n'est pas majoré si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a > M.$$

A est minoré si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \geqslant m.$$

Si A est majoré par M, alors tout élément supérieur à M est également un majorant. Il en résulte qu'on peut aussi écrire que : A est majoré si

$$\exists M > 0,\ \forall a \in A, a \leqslant M$$

ou si

$$\exists M > 1,\ \forall a \in A, a \leqslant M$$

ou encore pour n'importe quelle constante introduisant M. De même, A est minoré si

$$\exists m < -2024,\ \forall a \in A, a \geqslant m.$$

Exemple(s). *Montrer que $2\mathbb{N} = \{2n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré.*
Preuve : Méthode 1 : Supposons par l'absurde que $2\mathbb{N}$ est majoré. Alors il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2n \leqslant M\,.$$

Or $M < E(M) + 1 < 2(E(M) + 1)$ et $2(E(M) + 1) \in 2\mathbb{N}$. Contradiction.
Méthode 2 : partons de la négation de la définition d'être majoré. Soit $M \in \mathbb{R}$, montrons qu'il existe un entier pair n tel que $n > M$. Si $M \geqslant 0$, $n = 2(E(M) + 1)$ convient. Si $M < 0$, $n = 0$ convient.

Définition. *$A \subset \mathbb{R}$ est borné s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant M$.*

Autrement dit, A est borné si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, |a| \leqslant M.$$

Proposition. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est borné si et seulement si A est minoré et majoré.*

Preuve : Voir Annales du TD.

Définition. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. M est le maximum de A (ou plus grand élément de A) et on note $M = \max(A)$ si

— $M \in A$ et

— M est un majorant de A.

2. m est le minimum de A (ou plus petit élément de A) et on note $m = \min A$ si

— $m \in A$ et

— m est un minorant de A.

Exemples :

$A =]-\infty, 5]$ est majoré par 5 et par tout réel plus grand que 5 mais n'admet pas de minorant. A admet 5 comme maximum et n'a pas de minimum.

$B =]-\infty, 5[$ est majoré par 5 mais n'admet pas de maximum.

$C =]-5, -3[\cup]-2, +\infty[$ est minoré par -5 (et par tout réel plus petit que -5), mais n'admet pas de majorant. C n'admet ni minimum, ni maximum.

$D =]5, 11[$ admet un majorant (12 par exemple) et un minorant (0 par exemple). D est donc borné. Par contre D n'admet ni maximum ni minimum.

Quelques démonstrations (les autres sont laissées en exercice) :
Preuve : Montrons que $\max A = 5$.
Par définition, M est un maximum de A si $M \in A$ et pour tout $a \in A$, $a \leqslant A$.
Pour tout $a \in A$, $a \leqslant 5$ et $5 \in A$ donc $\max A = 5$.

Preuve : Montrons que B n'admet pas de maximum. Type d'énoncé : montrons une propriété P.
Par définition, M est un maximum de B si $M \in B$ et pour tout $b \in B$, $b \leqslant M$.
Par négation, M n'est pas un maximum de B si $M \notin B$ ou s'il existe $b \in B$, $b > M$.
Comment écrire la propriété à démontrer avec des quantificateurs ?
B admet un maximum si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ (M \in B \text{ et } \forall b \in B, b \leqslant M)$$

soit encore

$$\exists M \in B,\ \forall b \in B, b \leqslant M\,.$$

Par négation, B n'admet pas de maximum si

$$\forall M \in B,\ \exists b \in B, b > M\,.$$

◇ Méthode directe : Soit $M \in B$. Construisons un $b \in B$ tel que $b \leqslant M$.
Puisque $M \in B$, $M < 5$ donc $b = \frac{M+5}{2}$, moyenne de M et 5 vérifie $M < b < 5$ d'où $b \in B$ et $M < b$. Ainsi, M n'est pas un maximum de B et B n'admet pas de maximum.
On pouvait aussi utiliser le Lemme de réécriture : puisque $M < 5$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M + \varepsilon < 5$. Alors en posant $b = M + \varepsilon$, on a $b \in B$ et $M < b$ donc M n'est pas un maximum de B.
◇ Méthode par l'absurde : Supposons que B admette un maximum et notons le M. Alors $M \in B$ donc $M < 5$. Or si $b = \frac{M+5}{2}$, $b \in B$ et $M < b$ donc M n'est pas un maximum de B. Contradiction.

Fin Séance 2 - 2024

Proposition. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.*
S'il existe, le maximum de A est nécessairement unique.
S'il existe, le minimum de A est nécessairement unique.

Preuve : Face à un énoncé qui paraît atypique, on reformule ou on pense à raisonner par l'absurde. Quand a-t-on déjà vu la notion d'unicité ? Pour les fonctions injectives et bijectives. Rappel : f est injective si pour tout élément de son image, il existe un unique antécédent ou autrement dit, si un élément de l'image admet deux antécédents, alors ceux-ci sont égaux :

$$\forall x, y \in D_f, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y\,.$$

Soient $M_1 \in \mathbb{R}$ et $M_2 \in \mathbb{R}$ deux maxima de A. Montrons qu'ils sont égaux.
On traduit les hypothèses : Pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant M_1$ et $a \leqslant M_2$. De plus, $M_1 \in A$ et $M_2 \in A$. Méthode : Montrons l'égalité $M_1 = M_2$ par double inégalité. M_2 est un maximum pour A donc en particulier, $M_1 \leqslant M_2$ car $M_1 \in A$. Par symétrie $M_2 \leqslant M_1$ et donc on a l'égalité. Donc si un maximum de A existe, il est nécessairement unique.
La démonstration de l'unicité du minimum est laissée en exercice.

Notation : Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Posons

$$A = u(\mathbb{N}) = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad B = f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}.$$

Alors, lorsque les objets suivants existent, on note

$$\max_{n\in\mathbb{N}} u_n \doteq \max A \quad \text{et} \quad \min_{n\in\mathbb{N}} u_n \doteq \min A$$

$$\max_{x\in I} f(x) \doteq \max B \quad \text{et} \quad \min_{x\in I} f(x) \doteq \min B$$

Exemples :

Si $A = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a $\max(A) = 1$. A est minoré par 0 mais n'admet pas de minimum.

Si $A = \{(-1)^n n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, A n'est ni majoré, ni minoré et n'admet ni maximum ni minimum.

Si $A = \sin(\mathbb{R})$, on a $\min(A) = -1$ et $\max(A) = 1$.

Si $A = \ln([1, +\infty[)$, on a $\min(A) = 0$ et A n'est pas majoré donc A n'admet pas de maximum.

Si $A = \arctan(\mathbb{R})$, A est majoré par $\frac{\pi}{2}$ et minoré par $-\frac{\pi}{2}$ mais n'admet ni maximum ni minimum.

Quelques démonstrations (les autres sont laissées en exercice) :
Preuve : Montrons que $A = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'admet pas de minimum.
Par définition, m est un minimum de A si $m \in A$ et pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$.
Supposons par l'absurde que A admette un minimum et notons le m. Par définition du minimum, $m \in A$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = \frac{1}{n}$. Or si $a = \frac{1}{n+1}$ alors $a \in A$ et $a < m$. Contradiction.

Preuve : Montrons que $A = \ln([1, +\infty[)$ n'est pas majoré.
Par définition, A est majoré si

$$\exists M > 0,\ \forall a \in A, a \leqslant M.$$

Par négation, A n'est pas majoré si

$$\forall M > 0,\ \exists a \in A, a \leqslant M.$$

Soit $M > 0$. Montrons que M n'est pas un majorant de A. Posons $x = e^{M+1}$ et $y = \ln(x) = M + 1$. Puisque $x \geqslant 1$ (car $M + 1 \geqslant 0$) et $y = \ln(x)$, $y \in A$ or $y > M$ donc M n'est pas un majorant de A. Ceci démontre que M n'est pas majoré.
Si on avait considéré $M \in \mathbb{R}$ quelconque, $x = e^{|M|+1}$ aurait convenu.
On aurait pu aussi raisonner par l'absurde en supposant A majoré.
Preuve : Montrons que $A = \arctan(\mathbb{R})$ n'admet pas de minimum.
Par définition, m est un minimum de A si $m \in A$ et pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan x$ est la fonction réciproque de la fonction bijective $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ et donc $A =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Supposons par l'absurde que A admette un minimum et notons le m. Alors $m \in A$ donc $-\frac{\pi}{2} < m < \frac{\pi}{2}$.
Or si $a = \frac{m - \frac{\pi}{2}}{2}$, $a \in A$ et $a < m$ donc m n'est pas un minimum de A. Contradiction.
On le voit à travers les exemples précédents : tout ensemble n'admet pas forcément de majorant, de minorant, de maximum ou de minimum. Par contre,

Proposition. *Tout ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.*

Preuve : Soit $A \subset \mathbb{R}$.
Méthode 1 (à l'aide du cours) : A est fini donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est de cardinal n. On a $n > 0$ car A est non vide. Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
Quitte à permuter les indices, on peut supposer $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Alors pour tout $a \in A$, $a \leqslant a_n$ et $a_n \in A$ d'où $\max A = a_n$. De même, $\min A = a_1$.
Méthode 2 (sans prérequis) : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

tout ensemble de $\mathbb{R}$ de cardinal n admet un maximum et un minimum.

Initialisation : posons $n = 1$ et soit $A \subset \mathbb{R}$ de cardinal 1. On a $A = \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ d'où $\max(A) = \min(A) = a$.
Hérédité : supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble de cardinal $n+1$. Alors il existe $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Notons $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Comme B est de cardinal n, par hypothèse de récurrence, B admet un minimum noté m et un maximum noté M. Or $A = B \cup \{a_{n+1}\}$. Ainsi, si $M \geqslant a_{n+1}$, alors M est plus grand que tous les éléments de A et appartient à B donc à A, donc M est le maximum de A. Sinon $M < a_{n+1}$, et alors c'est a_{n+1} qui est le maximum de A. On procède de la même manière pour le minimum de A. Ceci achève la récurrence.

Remarque. *L'argument "Quitte à permuter les indices, ..." ne s'applique qu'à un ensemble fini. Si $A = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $u_n = \frac{1}{n}$, on ne peut pas réordonner les indices pour avoir $u_{\sigma(1)} \leqslant u_{\sigma(2)} \leqslant \ldots$.*

L'existence du maximum pour tout ensemble fini donne une deuxième définition de valeur absolue :

Proposition.-Def *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max\{x, -x\}$.*

Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ des réels distincts deux à deux. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$,*

$$]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\cap]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[= \emptyset\,.$$

La preuve utilise l'existence du minimum d'un ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$. Elle est donnée à la fin de ce chapitre.
Lorsque nous étudierons les suites, ce résultat permettra de montrer que si deux suites u et v convergent vers des limites distinctes ℓ_u et ℓ_v, on peut, à partir d'un certain rang, séparer leurs termes dans deux intervalles disjoints, car :

$$\exists \varepsilon > 0,\ ]\ell_u - \varepsilon, \ell_u + \varepsilon[\cap]\ell_v - \varepsilon, \ell_v + \varepsilon[= \emptyset\,.$$

On pourra par exemple en déduire que si $\ell_u < \ell_v$, alors à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout $p, q \geqslant N$, $u_p < \ell_u + \varepsilon < \ell_v - \varepsilon < v_q$ donc $u_p < v_q$.

4. Notion de borne supérieure

Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. On note*

$$\mathcal{M}(A) := \{M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M\}$$

l'ensemble des majorants de A.

Exemple(s). $\mathcal{M}([0,1[) = [1, +\infty[$, $\mathcal{M}([0,1]) = [1, +\infty[$, $\mathcal{M}([1, +\infty[) = \emptyset$, $\mathcal{M}(\emptyset) = \mathbb{R}$.

Définition. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si $\mathcal{M}(A)$ admet un minimum, on l'appelle borne supérieure de A et on le note $\sup(A)$ (ou $\sup A$). Ainsi, si elle existe, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.*

Remarque importante : par unicité du minimum, si elle existe, la borne supérieure est unique. Elle n'existe pas forcément. **Il faudra toujours veiller à justifier l'existence de la borne supérieure avant même de l'évoquer.**

Exemple(s). $A =]-\infty, 5]$, $B =]-\infty, 5[$, $C =]-5, -3[\cup]-2, +\infty[$, $D =]5, 11[$.

— $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B) = [5, +\infty[$. *Cet intervalle admet 5 pour minimum donc A et B admettent une borne supérieure qui vaut 5 : $\sup A = \sup B = 5$.*

— $\mathcal{M}(C) = \emptyset$. *L'ensemble vide n'admet pas de minimum car s'il existait ce minimum appartiendrait à l'ensemble vide donc C n'admet pas de borne supérieure. Plus généralement, si une partie de $\mathbb{R}$ est non majorée, elle n'admet pas de borne supérieure.*

— $\mathcal{M}(D) = [11, +\infty[$*, D admet une borne supérieure et* $\sup D = 11$.

Preuve : Montrons que $\mathcal{M}(A) = [5, +\infty[$. Type d'énoncé : montrer une égalité d'ensemble. Montrons l'égalité par double inclusion.
($\subset$) Soit $M \in \mathcal{M}(A)$, montrons que $M \in [5, +\infty[$.
On traduit notre hypothèse : par définition, M est un majorant de $A =]-\infty, 5]$.
Supposons par l'absurde que $M < 5$ alors (par le Lemme de réécriture) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M < M + \varepsilon < 5$ alors $M + \varepsilon \in A$ et $M < M + \varepsilon$ ce qui contredit que M soit un majorant de A. Ainsi $M \in [5, +\infty[$ d'où $\mathcal{M}(A) \subset [5, +\infty[$.
($\supset$) Soit $x \in [5, +\infty[$. On a pour tout $a \in A$, $a \leqslant 5 \leqslant x$ donc $x \in \mathcal{M}(A)$, *i.e.* $[5, +\infty[\subset \mathcal{M}(A)$. D'où l'égalité recherchée.
Pour démontrer que $\sup A = 5$, il reste à démontrer que $[5, +\infty[$ admet un minimum et que celui-ci vaut 5. On va voir comment appliquer des démonstrations plus rapides et tout-en-un.

Proposition. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et* $\sup(A) = \max(A)$.

Preuve : Voir TD.

Corollaire. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet une borne supérieure et que* $\sup(A) \notin A$ *alors A n'admet pas de maximum.*

Preuve : Supposons par l'absurde que A admette un maximum, alors d'après la proposition précédente, $\sup(A) = \max(A)$ or $\max(A) \in A$. Contradiction.

Exemple(s). *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, si $A = [a, b]$ alors une fois montré que* $\max A = b$*, on en déduit immédiatement que* $\sup A = \max A = b$.
De même si $A =]-\infty, b]$. En particulier $\sup(]-\infty, 5]) = \max(]-\infty, 5]) = 5$.

On a un résultat plus général d'existence de la borne supérieure.

Théorème (Existence de la borne supérieure)**.** *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Preuve : admis. Ce résultat est intrinsèquement lié à la construction de $\mathbb{R}$. Il n'a pas d'équivalent dans $\mathbb{Q}$. Par exemple, considérons le sous-ensemble $Q = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^5 \leqslant 2\}$ de $\mathbb{Q}$. Alors l'ensemble des majorants de Q dans $\mathbb{Q}$ est $\mathcal{M}_{|\mathbb{Q}}(Q) \doteq \{M \in \mathbb{Q} \,/\, \forall q \in Q, q \leqslant M\} = \{M \in \mathbb{Q} \,/\, M^5 \geqslant 2\} = \{M \in \mathbb{Q} \,/\, M^5 > 2\}$ car $\sqrt[5]{2} \notin \mathbb{Q}$ et ce dernier ensemble n'admet pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. Il est possible de *construire* $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ de telle sorte que l'existence de la borne supérieure soit automatiquement vérifiée. Cette construction dépasse le cadre de ce cours. Nous nous contenterons de voir cette propriété comme un axiome sur l'ensemble des nombres réels.
Ce sera un des rares résultats admis de ce cours. Nombre de résultats de ce cours découlent de cet axiome relatif à la construction de $\mathbb{R}$. C'est donc un résultat fondamental à la cohérence de tout ce qui va suivre !

Exemple(s). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, alors $f(\mathbb{R})$ admet une borne supérieure.*
Preuve : Par hypothèse il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant M$ d'où $f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant M$. Ainsi, $f(\mathbb{R}) = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure.

Notation : Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Posons

$$A = u(\mathbb{N}) = \{u_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad B = f(I) = \{f(x) \,/\, x \in I\}.$$

Alors, lorsque les objets suivants existent, on note

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \doteq \sup A \quad \text{et} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n \doteq \inf A$$

$$\sup_{x \in I} f(x) \doteq \sup B \quad \text{et} \quad \inf_{x \in I} f(x) \doteq \inf B$$

(on anticipe ici l'introduction de la borne inférieure).

Exemple(s). *Si $A = \{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\}$, on a* $\max A = 1$ *donc* $\sup A = 1$.

Si $A = \{\frac{2}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{e^{-n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$*, on a* $\max A = 2$ *donc* $\sup A = 2$.
Si $A = \{(-1)^n n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$*, A n'est pas majoré donc n'admet pas de borne supérieure.*
Si $A = \sin(\mathbb{R})$*, on a* $\max A = 1$ *donc* $\sup A = 1$ *(ce qui s'écrit encore* $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \sin(x) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \sin(x) = 1$*).*
Si $A = \ln([1, +\infty[)$*, A n'est pas majoré donc n'admet pas de borne supérieure.*
Si $A = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$*, A n'admet pas de maximum mais admet une borne supérieure :* $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

Preuve : Montrons que si $A = \{\frac{2}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{e^{-n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, $\sup A = \max A = 2$.
On commence par chercher un encadrement éventuel des éléments de A (aussi optimal que possible).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{2}{n} \leqslant 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < e^{-n} \leqslant 1$ donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant 2$ or $2 \in A$ ($\frac{2}{n}$ pour $n = 1$) donc $\max A = 2$ donc $\sup A = \max A = 2$.
Preuve : Montrons que si $A = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sup A = \frac{\pi}{2}$.
On commence par chercher un encadrement éventuel des éléments de A (aussi optimal que possible).
Pour tout $a \in A$, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$.
On justifie l'existence de la borne. A est majoré et non vide ($0 \in A$), donc admet une borne supérieure.
Par définition, $\sup A$ est alors le plus petit des majorants de A.
Montrons que $\sup A = \frac{\pi}{2}$ par **double inégalité**.
D'après l'encadrement précédent, $\frac{\pi}{2}$ est un majorant donc $\sup A \leqslant \frac{\pi}{2}$. Montrons maintenant que $\sup A \geqslant \frac{\pi}{2}$. Posons $y = \sup A$ et supposons par l'absurde que $y < \frac{\pi}{2}$. Puisque $0 \in A$, $0 \leqslant y$ et par le lemme de réécriture, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Alors $y + \varepsilon \in A$ car $0 \leqslant y < y + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ et cela contredit donc que y soit un majorant de A. Ainsi, $\sup A \geqslant \frac{\pi}{2}$ et donc $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

Pourquoi justifier l'existence d'objets mathématiques (bornes, limites, dérivées) ?
$\diamond$ Un exemple : Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall a \in A,\ a \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \forall a \in A,\ a \geqslant 2\,.$$

Peut-on en déduire que $A = \{2\}$? Non car nous n'avons pas (et ne pouvons pas) montrer l'existence d'un élément de A et en particulier, l'ensemble vide satisfait les hypothèses données.
$\diamond$ Autre exemple : Peut-on dire que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est positive, sa limite en $+\infty$ est positive ? Et qu'ainsi, puisque la limite est positive, elle existe ?
C'est là un sophisme (c'est à dire un raisonnement d'apparence rigoureuse mais non valide au sens de la logique). En effet, f n'admet pas nécessairement de limite en $+\infty$, à l'instar par exemple de $f : x \mapsto 1 + \cos x$. On doit donc s'assurer en amont de l'existence de la limite avant de pouvoir inférer des propriétés sur cette limite.
$\diamond$ Pour l'instant nous avons manipulé des ensembles explicites, mais lorsqu'on se demandera si pour des sous-ensembles A et B quelconques de $\mathbb{R}$, on peut exprimer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$, il faudra s'assurer de l'existence de ces termes avant de démontrer une formule les reliant.

Pour montrer qu'un réel S est la borne supérieur d'un ensemble, on peut soit raisonner par double inégalités, soit utiliser la caractérisation suivante :

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$. Alors S est la borne supérieure de A si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. S est un majorant de A,

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant S$, i.e. $a_\varepsilon \in]S - \varepsilon, S]$.

Preuve : Par définition, M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$.
Par définition, s'il existe $\sup A$ est le plus petit des majorants de A.
($\Rightarrow$) Supposons que $S = \sup(A)$. Alors par définition S est un majorant de A (1. est vérifié). De plus, S est le plus petit des majorants de A donc pour tout $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A puisque $S - \varepsilon < S$. Alors, par négation de l'assertion $S - \varepsilon$ *est un majorant de* A, on obtient qu'il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon$. Et S étant un majorant de A, $a_\varepsilon \leqslant S$.
($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que S vérifient les assertions 1. et 2. D'après 1. A est majorée et d'après 2., A est non vide car pour $\varepsilon = 1$, il existe $a_1 \in A$, donc par le théorème d'existence de la borne supérieure, $\sup(A)$ existe. Montrons que $S = \sup(A)$ par double inégalité.
($\geqslant$) S est un majorant de A, donc $\sup(A) \leqslant S$ puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants.
($\leqslant$) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon$ (un tel a_ε existe d'après 2.). Comme $\sup(A)$ est un majorant de A, $a_\varepsilon \leqslant \sup(A)$ et donc $S - \varepsilon < \sup(A)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $S < \sup(A) + \varepsilon$ d'où

$S \leqslant \sup(A)$. On aurait aussi pu montrer cette inégalité en raisonnant par l'absurde.
Finalement, $S = \sup(A)$.

Exemple(s). — *Si* $A = [0, 1]$, 1 *est un majorant de* A *et quelque soit* $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = 1$ *convient donc* $\sup A = 1$. *Plus généralement, si* S *est un majorant de* A *et* $S \in A$, *alors pour tout* $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = S$ *convient donc* $\sup A = S$. *Il est néanmoins plus simple de remarquer dans ce cas que* S *est le maximum de* A *donc* $\sup A = \max A = S$.

— *Si* $A = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $S = \frac{\pi}{2}$ *est un majorant de* A *et pour tout* $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ *satisfait l'encadrement* $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant S$. *Cependant, si* ε *est très grand, il se peut que* $S - \varepsilon$ *et surtout* a_ε *soient inférieurs à* $-\frac{\pi}{2}$, i.e. $a_\varepsilon \notin A$. *Dans ce cas, on peut poser* $a_\varepsilon = 0$ *qui vérifie encore l'encadrement. Pour regrouper les cas, on peut poser en toute généralité,* $a_\varepsilon = \max(0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2})$. *Ainsi, d'après la caractérisation de la borne supérieure* $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

Remarque. *Pour appliquer la caractérisation de la borne supérieure, il faut bien s'assurer que le* a_ε *proposé appartient effectivement à* A. *Ce point parfois subtile apparaît aussi dans les raisonnements par double inégalités (dans la démonstration un peu plus en amont, on a montré que* $y \geqslant 0$ *afin d'assurer que* $y + \varepsilon \in A$*).*

5. Notion de borne inférieure

Définition. *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *Si l'ensemble des minorants de* A,

$$\{m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \geqslant m\},$$

admet un maximum, on appelle ce maximum, borne inférieure de A *et on le note* $\inf A$. *Ainsi, si elle existe, la borne inférieure de* A *est le plus grand des minorants de* A.

Exemple(s). *On a par exemple* $\inf(]-5, +\infty[) = -5$, *mais aussi* $\inf([-5, +\infty[) = -5$. *La borne inférieure est toujours bien définie dans ces deux cas (on a une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et minorée. Notons que le minimum n'est pas défini dans le premier cas.*
Par contre $]-\infty, 2]$ *n'admet pas de borne inférieure, car l'ensemble de ses minorants est vide.*

Proposition. *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *Si* A *admet un minimum, alors* A *admet une borne inférieure et* $\inf(A) = \min(A)$.

Corollaire. *Soit* A *un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$. *Si* A *admet une borne inférieure et que* $\inf(A) \notin A$ *alors* A *n'admet pas de minimum.*

Preuve : Voir les exercices complémentaires du TD1.

Théorème (Existence de la borne inférieure)**.** *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Preuve : Cette propriété se déduit du théorème d'existence de la borne supérieure. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Définissons l'ensemble

$$B = \{-a,\ a \in A\}.$$

Ainsi défini, B est le symétrique de A par rapport à l'origine (on le note souvent $B = -A$). Par exemple, si $A =]a, b[$, $B =]-b, -a[$.
Notons $\underline{\mathcal{M}}(A)$ l'ensemble des minorants de A et $\mathcal{M}(B)$ l'ensemble des majorants de B. Montrons que $\underline{\mathcal{M}}(A) = -\mathcal{M}(B)$. En effet,

$$\begin{aligned} m \in \underline{\mathcal{M}}(A) &\iff \forall a \in A,\ m \leqslant a \\ &\iff \forall a \in A,\ -a \leqslant -m \\ &\iff \forall b \in B,\ b \leqslant -m \\ &\iff -m \in \mathcal{M}(B),\ \textit{i.e.}\ \ m \in -\mathcal{M}(B). \end{aligned}$$

Autrement dit, m est un minorant de A si et seulement si $-m$ est un majorant de B. En particulier, puisque A est minoré, B est donc majoré. Puisque A est non vide, B est également non vide (car il existe $a \in A$ donc $-a \in B$). Ainsi, par le théorème d'existence de la borne supérieure, B admet une borne supérieure, notée S et donc par définition, $S = \min(\mathcal{M}(B))$. On rappelle que la borne supérieure est le plus petit des majorants. Alors A admet une borne inférieure puisque $-S = \max(\underline{\mathcal{M}}(A))$. En

effet, par définition du minimum, $S \in \mathcal{M}(B)$ donc $-S \in \underline{\mathcal{M}}(A)$. De plus, S est un minorant de $\mathcal{M}(B)$ donc
$$\forall M \in \mathcal{M}(B),\ S \leqslant M$$
d'où
$$\forall m \in \underline{\mathcal{M}}(A),\ m \leqslant -S$$
donc $-S$ est un majorant de $\underline{\mathcal{M}}(A)$ et est donc son maximum puisqu'il appartient à cet ensemble.

À l'instar du Théorème 4, il existe une caractérisation semblable pour la borne inférieure :

Proposition (Caractérisation de la borne inférieure)**.** *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $I \in \mathbb{R}$. Alors $I = \inf A$ si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. I est un minorant de A,

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $I \leqslant a_\varepsilon < I + \varepsilon$.

Exemple(s). *Déterminons, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de $A = \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \ / N \in \mathbb{N} \right\}$.*

Preuve : A est l'ensemble des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n!}$. Cette série est à termes positifs donc la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, avec $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$, est croissante. De plus, elle converge vers e. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_0 \leqslant S_k \leqslant \lim_{N\to+\infty} S_N$; autrement dit, pour tout $a \in A$, $1 \leqslant a \leqslant e$.
Puisque $S_0 \in A$, A admet un minimum et donc une borne inférieure, et on a $\min(A) = \inf(A) = 1$.
Montrons que $\sup A = e$ avec la caractérisation de la borne supérieure.
a) e est un majorant de A.
b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{N\to+\infty} S_N = e$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geqslant N_\varepsilon$, $|S_N - e| < \varepsilon$. En particulier, $e - \varepsilon < S_{N_\varepsilon} < e$ et on a bien $S_{N_\varepsilon} \in A$. On anticipe ici sur le chapitre sur les suites où nous rappellerons qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon\,.$$
Ainsi, d'après la caractérisation de la borne supérieure : $\sup A = e$. Puisque $\sup A \notin A$, A n'admet pas de maximum.

6. Extension aux nombres complexes

Définition (Module d'un nombre complexe)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.*
Soit encore, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Proposition. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a*

1. $|zz'| = |z||z'|$,

2. $\mathfrak{Re}\, z \leqslant |z|$ et $\mathfrak{Im}\, z \leqslant |z|$,

3. $|z| = 0 \iff z = 0$.

Proposition (Inégalités triangulaires)**.** *Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.*

Preuve : Les modules étant des réels positifs, on a
$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \iff |z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2\,.$$
Or on a bien
$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z}') = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z}' + \overline{z\overline{z}'} = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\, z\overline{z}' \leqslant (|z| + |z'|)^2\,.$$
En appliquant l'inégalité triangulaire à $z = z + z' - z'$, on obtient $|z| = |(z+z') + (-z')| \leqslant |z + z'| + |z'|$. Ainsi $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$ et de même $|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$ en échangeant les rôles. D'où l'inégalité triangulaire inverse.

Définition. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On dit que A est borné s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que pour tout $z \in A$, $|z| \leqslant M$.*

Exemple(s). *Si $A = \{re^{i\theta} \,/\, 0 \leqslant r \leqslant 1, \theta \in [0, 2\pi[\}$, alors A est borné par 1 car pour tout $a \in A$, $|a| \leqslant 1$.*
Si $A = \{x + iy \,/\, x, y \in \mathbb{R}, |x| \leqslant 1\}$, alors A n'est pas borné car pour tout $M \geqslant 0$, $z = i(M+1) \in A$ et $|z| = M + 1 > M$.

Remarque. *Si $A \subset \mathbb{R}$, A est borné en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}$ si et seulement si A est borné en tant que sous-ensemble de $\mathbb{C}$.*

Proposition. *$A \subset \mathbb{C}$ est borné si et seulement si $\{|z| \,/\, z \in A\} \subset \mathbb{R}$ est borné.*

Preuve : $\{|z| \,/\, z \in A\}$ est borné si et seulement si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $z \in A$, $|z| \leqslant M$, *i.e.* A est borné.

Proposition. *Tout ensemble fini de $\mathbb{C}$ est borné.*

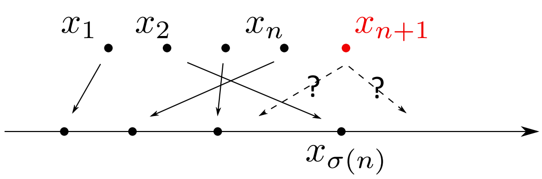
Preuve : L'ensemble vide est borné. Soit maintenant $A \subset \mathbb{C}$ fini et non vide. Alors $\{|z| \,/\, z \in A\}$ est un ensemble fini de $\mathbb{R}$ donc borné car il admet un maximum et un minimum. Ainsi, A est borné d'après la proposition précédente.

Fin Séance 3 - 2024

7. Quelques démonstrations supplémentaires

Proposition. *Soient $n > 1$ un entier et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On peut toujours réindexer ces nombres réels pour les trier par ordre croissant : il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$.*

Preuve : *(à la limite du programme)*
En reformulant, on s'aperçoit qu'il s'agit de montrer une propriété pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Une bijection sur $[\![1, n]\!]$ est une fonction $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!], i \mapsto \sigma(i)$ telle que pour tout $i \neq j$, $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ (injectivité) et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(i) = j$ (surjectivité).
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $P(n)$: "pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$".
Initialisation ($n = 2$) : Si $x_1 \leqslant x_2$ alors $\sigma = \mathrm{id}$ convient. Si $x_1 > x_2$ alors on pose $\sigma(1) = 2$ et $\sigma(2) = 1$.
Hérédité : Supposons P(n) vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une bijection $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(1)} \leqslant x_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(n)}$ (cf figure).



Il nous faut maintenant construire une bijection $\tilde{\sigma} : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$ pour ordonner les $n+1$ réels considérés. Puisque σ permet de trier par ordre croissant les n premiers réels, le tri final dépend de la position de x_{n+1}.
Si $x_{\sigma(n)} \leqslant x_{n+1}$, alors on complète la bijection précédente en posant $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ si $i \in [\![1, n]\!]$ et $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$.
Sinon, $x_{n+1} < x_{\sigma(n)}$ et $x_{\sigma(n)}$ est alors le plus grand élément de l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$. On échange alors x_{n+1} et $x_{\sigma(n)}$ avec la transposition $\tau : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$ définie par $\tau(n+1) = \sigma(n)$, $\tau(\sigma(n)) = n+1$ et $\tau(i) = i$ sinon. Puis on réitère le raisonnement initial sur $(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n+1)})$. Par récurrence, il existe une bijection $\sigma_2 : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que $x_{\sigma(\tau(1))} \leqslant x_{\sigma(\tau(2))} \leqslant \ldots \leqslant x_{\sigma(\tau(n))}$ et puisque $x_{\tau(n+1)}$ est le plus grand réel, on complète la bijection σ_2 en posant $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ si $i \in [\![1, n]\!]$ et $\tilde{\sigma}(n+1) = n+1$. De sorte que la bijection finale est donnée par $\tilde{\sigma} \circ \tau$.
On laisse le soin en exercice de vérifier que $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\sigma} \circ \tau$ sont bien des bijections.

Remarque. — *On a exploité que "$\leqslant$" est une relation d'ordre totale : soit $x_{\sigma(n)} \leqslant x_{n+1}$ soit $x_{n+1} \leqslant x_{\sigma(n)}$.*
— *Une bijection sur un ensemble fini s'appelle une permutation. Une permutation qui n'échange que deux éléments s'appelle une transposition.*

Proposition. *Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ des réels distincts deux à deux. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\text{pour tout } i \neq j,\ ]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\cap]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[= \emptyset\,.$$

Preuve : (*à la limite du programme*)
Montrons cette propriété par récurrence sur n.
Initialisation ($n = 2$) : soient $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$. Méthode : pour montrer l'existence d'une variable, on construit un candidat explicite. Représenter graphiquement la longueur $L = |x_1 - x_2|$. Posons $\varepsilon = \frac{L}{4}$ ($\varepsilon = \frac{L}{2}$ convient également). On a $\varepsilon > 0$. Montrons alors que $I =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\cap]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$ est vide. Méthode : pour montrer qu'un ensemble est vide, on raisonne souvent par l'absurde.
Par définition, $I = \emptyset$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \notin I$. Par négation, $I \neq \emptyset$ si il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in I$. Supposons par l'absurde que I est non vide et soit $x \in I$. Alors $|x_1 - x| < \varepsilon$ et $|x_2 - x| < \varepsilon$ or (on rassemble les hypothèses :) $|x_1 - x_2| = 4\varepsilon$. (graphiquement, $|x_1 - x| < \varepsilon$ et $|x_2 - x| < \varepsilon$ implique $|x_1 - x_2| < 2\varepsilon$ d'après l'inégalité triangulaire.) Méthode : on relie entre elles les quantités $|x_1 - x_2|$, $|x_1 - x|$ et $|x_1 - x|$ en faisant apparaître x dans la première. D'après l'inégalité triangulaire, $4\varepsilon = |x_1 - x_2| = |x_1 - x + x - x_2| \leqslant |x_1 - x| + |x_2 - x| < 2\varepsilon$, contradiction.
Hérédité : Méthode : il arrive parfois que l'initialisation donne une intuition pour une démonstration directe plus simple que l'étape d'hérédité !

Tabula rasa ! Démonstration directe :

Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$. Posons $\varepsilon = \frac{L}{4}$ avec $L = \min\{|x_i - x_j|, i \neq j\}$. L est bien défini car cet ensemble est fini (de cardinal inférieur à $n(n-1)/2$) et $L > 0$ donc $\varepsilon > 0$. Montrons que les intervalles $(]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[)_i$ sont deux à deux disjoints. Soient $i \neq j$ et supposons par l'absurde qu'il existe $x \in]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\cap]x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon[$. Alors $|x_i - x| < \varepsilon$, $|x_j - x| < \varepsilon$ et $|x_i - x_j| \geqslant L = 4\varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, $4\varepsilon \leqslant |x_i - x_j| = |x_i - x + x - x_j| \leqslant |x_i - x| + |x_j - x| < 2\varepsilon$, contradiction.
La méthode de démonstration sous ce faux départ par récurrence consiste à raisonner d'abord sur une version simplifiée du problème (ici le sous-ensemble des p-uplets de taille 2).