

License 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Partiel du 12/11/2025. Durée 1h30 ou 2h pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Lorsqu'on demande d'illustrer un raisonnement, on attend un dessin intégrant un maximum des variables utilisées pour le raisonnement.

Total sujet : $15.5 + 5 = 20.5$

Soit $x \in \mathbb{Q}_+$ représentant la quantité de points obtenue sur 20.5 (indiquée sur la copie). Alors la note sur 20 est obtenue par la relation : $20 \cdot \frac{\min(19, x)}{19}$ arrondie à 0.1 près.

Exercice 1 (15.5pt)

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et

$$C = \{\max(a, b) / a \in A, b \in B\}.$$

À titre d'exemple, si $A =]0, 2[$ et $B = [-1, 1] \cup \{5\}$, alors $C =]0, 2[\cup \{5\}$ (ceci est uniquement un exemple ; par la suite, A et B ne sont pas supposés égaux à ces ensembles).

1. A-t-on nécessairement

- a) $C \subset A \cup B$? b) $A \cap B \subset C$?

2. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- a) $c \in C \iff (c \in A \text{ et } \exists b \in B, c \geq b) \text{ ou } (c \in B \text{ et } \exists a \in A, c \geq a)$.
b) $\exists a \in A \cap C \implies \exists b \in B \cap C$.
c) $(\forall M > 0, \exists x \in A \cup B, x \geq M) \implies (\forall M > 0, \exists c \in C, c \geq M)$.

3. Déterminer C lorsque $\max(A)$ et $\min(B)$ existent et $\max(A) \leq \min(B)$.

4. Déterminer C lorsque $A =]a_0, +\infty[$ et $B =]-\infty, b_0[$ avec $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 < b_0$. Illustrer votre raisonnement.

5. On ne suppose plus que A et B sont des intervalles mais on suppose que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent et sont égales. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de C . Illustrer votre raisonnement.

6. On suppose que $A = \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $B = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ où $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante et majorée.

- a) Montrer que u admet une limite, notée ℓ_u , et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell_u$.
b) On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que $u_0 \leq a < \ell_u$. Montrer que $C = \{a\} \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\}$.
c) Déterminer le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de C , sous réserve que ces quantités existent.

Correction.

$$15.5 = (0.5 + 0.5) + (1 + 0.5 + 1.5) + 1 + 2 + 2.5 + (1.5 + 1 + 3.5)$$

1. a) Oui. Soit $c \in C$. Par définition, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $c = \max(a, b)$ donc $c = a$ ou $c = b$, i.e. $c \in A \cup B$. (0.5pt)

b) Oui, soit $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x = \max(a, b)$ avec $a = b = x$ d'où $x \in C$. (0.5pt)

2. a) Raisonnons par double implication.

($\implies$) Si $c \in C$ alors il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $c = \max(a, b)$. Si $a \geq b$, alors $c = a$, donc $c \in A$ et $c \geq b$ avec $b \in B$. Sinon $a < b$, alors $c = b$, donc $c \in B$ et $c \geq a$ avec $a \in A$.

($\impliedby$) Si $c \in A$ et il existe $b \in B$ tel que $c \geq b$, alors $c = \max(c, b)$ avec $c \in A$, $b \in B$ donc $c \in C$. Si $c \in B$ et il existe $a \in A$ tel que $c \geq a$, alors $c = \max(a, c)$ avec $c \in B$, $a \in A$ donc $c \in C$. (1pt)

b) Faux. Si $A = \{1\}$ et $B = \{0\}$, alors $C = \{1\}$; de sorte que $A \cap C = \{1\}$ et $B \cap C = \emptyset$. (0.5pt)

c) Vrai. Supposons la prémisse vraie, à savoir que $A \cup B$ n'est pas majoré. Soit $M > 0$. Puisque A et B sont non vides, il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. Posons $M' = \max(\{a_0, b_0, M\})$ (le maximum d'un ensemble fini étant bien défini). Par hypothèse, il existe $x \in A \cup B$ tel que $x \geq M'$. Si $x \in A$, alors $x = \max(x, b_0)$ car $x \geq M' \geq b_0$, d'où $x \in C$. Sinon $x \in B$, et alors $x = \max(a_0, x)$ car $x \geq M' \geq a_0$, d'où $x \in C$. Dans les deux cas, on a bien trouvé $x \in C$ satisfaisant $x \geq M' \geq M$. (1.5pt)

3. Montrons que $C = B$ par double inclusion.

($\subset$) Soit $c \in C$, alors il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $c = \max(a, b)$. Or $a \leq \max(A) \leq \min(B) \leq b$, donc $c = b$, d'où $c \in B$. (0.5pt)

($\supset$) Soit $b \in B$. Alors $b \geq \min(B) \geq \max(A)$, donc $b = \max(\max(A), b)$. Or $\max(A) \in A$, donc $b \in C$. (0.5pt)

4. Méthode 1 : Montrons que $C = A$ par double inclusion.

($\supset$) Soit $a \in A$ i.e. $a > a_0$. Alors pour $b = a_0 < b_0$, on a $b \in B$ car $a_0 < b_0$ et $a = \max(a, b)$. Ainsi $a \in C$.

($\subset$) Soit $c \in C$. Il existe donc $(a, b) \in A \times B$ tel que $c = \max(a, b)$. On a donc $c \geq a > a_0$, d'où $c \in A$.

Méthode 2 : Puisque $C \subset A \cup B$, déterminons réciproquement quels éléments de A et B sont dans C . Puisque $a_0 < b_0$, $a_0 \in B$ donc pour tout $a \in A$, $a = \max(a, a_0)$ d'où $A \subset C$. Soit $b \in B$. Si $b \leq a_0$, alors pour tout $a \in A$, $a > b$ donc $b \notin C$. Si $b > a_0$, alors pour $a = \frac{a_0+b}{2}$, $a \in A$ car $a > a_0$ et $a < b$ donc $b \in C$. Ainsi, $C =]a_0, +\infty[$. (R+dessin = 2pt)

5. Posons $S = \sup(A)$ (d'où $S = \sup(B)$). Montrons que $\sup(C) = S$ à l'aide de la caractérisation de la borne supérieure. Puisque $C \subset A \cup B$ et que S est un majorant de A et de B , on a pour tout $c \in C$, soit $c \in A$ d'où $c \leq S$, soit $c \in B$ d'où $c \leq S$. Ainsi, S est un majorant de C . Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, appliquée à l'ensemble A , il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leq S$. De même, il existe $b_\varepsilon \in B$ tel que $S - \varepsilon < b_\varepsilon \leq S$. Alors en posant $c_\varepsilon = \max(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$, $c_\varepsilon \in C$ et $S - \varepsilon < c_\varepsilon \leq S$. Ainsi, d'après la caractérisation de la borne supérieure, $S = \sup(C)$. (R+dessin = 2.5pt)

6. a) Par le théorème de la limite monotone, u étant (strictement) croissante et majorée, u converge.

On a noté ℓ_u sa limite. (0.5pt)

Par l'absurde supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq \ell_u$. Alors, comme u est strictement croissante, $u_{N+1} > \ell_u$ et pour tout $n \geq N + 1$, on a $u_n > u_{N+1}$. Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient $\ell_u \geq u_{N+1}$ et donc $\ell_u > \ell_u$, ce qui est impossible. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell_u$. (1pt)

b) Montrons par double inclusion que $C = A \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\}$.

($\subset$) On sait que $C \subset A \cup B$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in C$ alors il existe $a \in A$ tel que $u_n = \max(a, u_n)$ i.e. $u_n \geq a$. Par conséquent $C \subset A \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\}$.

($\supset$) Comme $a = \max(a, u_0)$, on a $a \in C$ i.e. $A \subset C$.

Enfin $\{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\} \subset C$ puisque pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq a$, on a $u_n = \max(a, u_n)$. D'où $A \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\} \subset C$. (1pt)

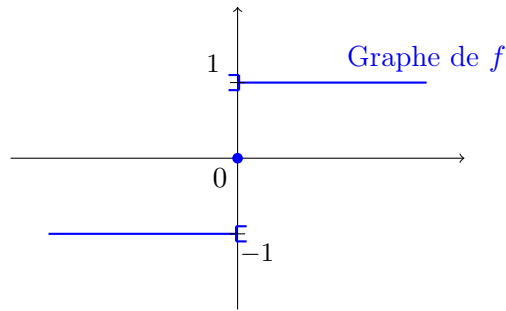
c) Montrons que a est le minimum de C . Comme $C = A \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\}$, a est un minorant de C et $a \in C$, donc $\min(C) = a$ et par conséquent C admet une borne inférieure et $\inf(C) = \min(C) = u_0$. (1pt)

Montrons que C admet ℓ_u comme borne supérieure. On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell_u$. De plus $a < \ell_u$, donc ℓ_u est un majorant de $C = \{a\} \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\}$.

Méthode 1 : Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \leq \ell_u - a$. Comme u converge vers ℓ_u , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq \ell_u - \varepsilon < u_N$. Ainsi $u_N \in \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\} \subset C$. Si $\varepsilon > \ell_u - a$, alors le terme u_N construit précédemment pour un ε plus petit vérifie encore $u_N \in C$ et $\ell_u - \varepsilon < u_N$ (a convient aussi). On a bien trouvé à chaque fois un élément $c \in C$ tel que $\ell_u - \varepsilon < c$. D'où par la caractérisation de la borne supérieure, on a $\sup(C) = \ell_u$.

Méthode 2 : Soit $\varepsilon = \ell_u - a$. Puisque u tend vers ℓ_u , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $a = \ell_u - \varepsilon < u_n$ et donc $u_n \in C$. La suite $(u_n)_{n \geq N}$ est à valeurs dans C et tend vers ℓ_u donc d'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a $\sup(C) = \ell_u$. (2pt)

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell_u$ et $a < \ell_u$, on a $\ell_u \notin C$. Ainsi, C n'admet pas de maximum. (0.5pt)

FIGURE 1. Graphe de la fonction f .**Exercice 2 (5pt)**

Soit la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{t}{|t|}, & \text{si } t \neq 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0 et satisfaisant

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n, p \geq N, u_n < 0 < u_p.$$

1. Calculer $f(t)$ quand $t > 0$ et quand $t < 0$. Tracer le graphe de f .
2. Tracer, à titre d'exemple, un graphe possible de u et le graphe associé de la suite $f(u) = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
Indication : sur un même dessin, tracer les termes de u par des points et les termes de $f(u)$ par des croix.
3. On reconsidère la suite u de l'énoncé. Déterminer, si elle existe, la limite de $f(u)$ uniquement à l'aide des définitions. Illustrer votre raisonnement.

Correction.

$$5 = 0.5 + 1.5 + 3$$

1. Pour $t > 0$, on a $f(t) = 1$ et pour $t < 0$, on a $f(t) = -1$. Pour le graphe, voir la Figure 1. (0.5pt)
2. (1.5pt)
3. (R+dessin = 3ptpt) Méthode 1 : Montrons que $f(u)$ est divergente, autrement dit que

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists k \geq N, |f(u_k) - \ell| \geq \varepsilon.$$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe $k \geq N$ tel que $|f(u_k) - \ell| \geq \varepsilon$. Par hypothèse, il existe $n, p \geq N$ tels que $f(u_n) = -1$ et $f(u_p) = 1$.

◊ Si $|f(u_n) - \ell| < \frac{1}{2}$, i.e. $\ell - \frac{1}{2} < -1 < \ell + \frac{1}{2}$, alors $\ell < -\frac{1}{2}$ et donc $|f(u_p) - \ell| = |\ell - 1| \geq \varepsilon$. On pose alors $k = p$.

◊ Sinon $|f(u_n) - \ell| \geq \frac{1}{2}$ et on pose alors $k = n$.

Dans les deux cas, on a bien construit un indice $k \geq N$ tel que $|f(u_k) - \ell| \geq \varepsilon$.

Méthode 2 : Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $f(u)$ tend vers ℓ . Alors pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|f(u_k) - \ell| < \varepsilon$. Par hypothèse, il existe de plus $n, p \geq N$ tels que $f(u_n) = -1$ et $f(u_p) = 1$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$2 = |f(u_n) - f(u_p)| = |f(u_n) - \ell + \ell - f(u_p)| \leq |f(u_n) - \ell| + |f(u_p) - \ell| < 2\varepsilon = 1.$$

Contradiction. La suite $f(u)$ ne converge vers aucun réel $\ell \in \mathbb{R}$ donc diverge.

Méthode 3 : à titre d'entraînement, on pourra redémontrer le résultat à l'aide de suites extraites.