

License 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Partiel du 12/11/2025. Durée 1h30 ou 2h pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Lorsqu'on demande d'illustrer un raisonnement, on attend un dessin intégrant un maximum des variables utilisées pour le raisonnement.

Total sujet : $15.5 + 5 = 20.5$

Soit $x \in \mathbb{Q}_+$ représentant la quantité de points obtenue sur 20.5 (indiquée sur la copie).

Alors la note sur 20 est obtenue par la relation : $20 \cdot \frac{\min(19, x)}{19}$ arrondie à 0.1 près.

Exercice 1 (15.5pt)

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et

$$C = \{\max(a, b) / a \in A, b \in B\}.$$

À titre d'exemple, si $A =]0, 2[$ et $B = [-1, 1] \cup \{5\}$, alors $C =]0, 2[\cup \{5\}$ (ceci est uniquement un exemple ; par la suite, A et B ne sont pas supposés égaux à ces ensembles).

1. A-t-on nécessairement

- a) $C \subset A \cup B$? b) $A \cap B \subset C$?

2. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- a) $c \in C \iff (c \in A \text{ et } \exists b \in B, c \geq b) \text{ ou } (c \in B \text{ et } \exists a \in A, c \geq a).$
 b) $\exists a \in A \cap C \implies \exists b \in B \cap C.$
 c) $(\forall M > 0, \exists x \in A \cup B, x \geq M) \implies (\forall M > 0, \exists c \in C, c \geq M).$

3. Déterminer C lorsque $\max(A)$ et $\min(B)$ existent et $\max(A) \leq \min(B)$.

4. Déterminer C lorsque $A =]a_0, +\infty[$ et $B =]-\infty, b_0[$ avec $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 < b_0$. Illustrer votre raisonnement.

5. On ne suppose plus que A et B sont des intervalles mais on suppose que $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent et sont égales. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de C . Illustrer votre raisonnement.

6. On suppose que $A = \{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $B = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ où $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante et majorée.

- a) Montrer que u admet une limite, notée ℓ_u , et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell_u$.
 b) On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que $u_0 \leq a < \ell_u$. Montrer que $C = \{a\} \cup \{u_n / n \in \mathbb{N}, u_n \geq a\}$.
 c) Déterminer le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de C , sous réserve que ces quantités existent.

Exercice 2 (5pt)

Soit la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{t}{|t|}, & \text{si } t \neq 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers 0 et satisfaisant

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n, p \geq N, u_n < 0 < u_p.$$

1. Calculer $f(t)$ quand $t > 0$ et quand $t < 0$. Tracer le graphe de f .

2. Tracer, à titre d'exemple, un graphe possible de u et le graphe associé de la suite $f(u) = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
Indication : sur un même dessin, tracer les termes de u par des points et les termes de $f(u)$ par des croix.

3. On reconsidère la suite u de l'énoncé. Déterminer, si elle existe, la limite de $f(u)$ uniquement à l'aide des définitions. Illustrer votre raisonnement.