Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Partiel du 13/11/2024. Durée 1h30 ou 2h pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ satisfait la propriété (P) si l'assertion suivante est vraie

$$\text{(P)} \qquad \forall x, y \in A, \quad x < y \implies \exists z \in A,\, x < z < y.$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer dans chacun des cas suivants si l'ensemble considéré satisfait la propriété (P).

a) $A_1 = \{a, b\}$. b) $A_2 =]a, b[\cup \{b+1\}$. c) $A_3 =]a, b] \cup \{b+1\}$.

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. Montrer que A satisfait (P).

3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble satisfaisant (P). Montrer que A n'est pas nécessairement un intervalle.

Correction.

1. a) A_1 ne satisfait pas (P). En effet, pour $x = a$ et $y = b$, il n'existe aucun $z \in A_1$ tel que $x < y < z$.

b) Montrons que A_2 satisfait (P). Soient $x, y \in A_2$ tels que $x < y$.

—Si $y < b$, alors $z = \frac{x+y}{2}$ satisfait $a < x < z < y < b$, et comme $]a, b[$ est un intervalle et $]a, b[\subset A_2$, on obtient $z \in A$.

—Sinon $y = b + 1$, alors $x \in]a, b[$ et donc $z = \frac{x+b}{2}$ satisfait $a < x < z < b < y$ et de nouveau $z \in]a, b[\subset A_2$.

On a bien trouvé dans tous les cas un éléments $z \in A$ tel que $x < z < y$, d'où A_2 satisfait la proposition (P).

c) A_3 ne satisfait pas (P). En effet, pour $x = b$ et $y = b+1$, il n'existe aucun $z \in A_3$ tel que $x < y < z$ puisque $A_3 \cap]b, b+1[= \varnothing$.

2. Soient $x, y \in A$. Si $x < y$ alors par définition d'un intervalle, pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$, on a $z \in A$. Ainsi, $z = \frac{x+y}{2}$ qui vérifie $x < z < y$ appartient à A. Donc A satisfait la proposition (P).
Si A est un singleton, (P) est vraie car sa négation est fausse.

3. D'après la question 1., A_2 satisfait (P). Or A_2 n'est pas un intervalle puisque $\frac{a+b}{2} \in A_2$ et $b+1 \in A_2$, mais $b + \frac{1}{2}$ qui satisfait

$$\frac{a+b}{2} \leqslant b + \frac{1}{2} \leqslant b + 1,$$

n'appartient pas à A_2.

Exercice 2

Soit $A \subset \mathbb{R}_+^*$ non vide satisfaisant la propriété suivante

$$(1) \qquad \forall a \in A,\, \frac{1}{a} \in A.$$

1. Donner un exemple d'intervalle non vide de $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant (1), puis un exemple de sous ensemble non vide de $\mathbb{R}_+^*$ ne satisfaisant pas (1).

2. a) On suppose que A admet un maximum. Montrer que A admet un minimum et donner sa valeur.

b) On suppose que $A = [b, c]$ avec $0 < b < c$. En déduire une relation entre b et c.

3. Montrer que $\inf(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas majoré.

Correction.

1. L'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ satisfait (1), puisque pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien $\frac{1}{x} > 0$.
L'ensemble $A = \{2\}$ ne satisfait pas (1), car $\frac{1}{2} \notin A$. Un autre exemple ne satisfaisant pas (1) : $\mathbb{N}^*$.

2. a) Notons $M = \max(A)$ et montrons que $m = \frac{1}{M}$ est le minimum de A. m est bien défini car $M \in A$ donc $M > 0$. Par définition de A, $m \in A$. Supposons par l'absurde que m n'est pas un minorant de A. Il existe alors $a \in A$ tel que $a < m$. Alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{m} = M$ (car $a > 0$ et $m > 0$). Puisque $\frac{1}{a} \in A$, cela contredit que $M = \max(A)$. Ainsi m est un minorant de A, or $m \in A$ donc $m = \min(A)$.

   b) Pour $A = [b, c]$, on a $\min(A) = b$ et $\max(A) = c$. D'après la question précédente, $\min(A) = \frac{1}{\max(A)}$, d'où $b = \frac{1}{c}$. En particulier, on doit avoir $\frac{1}{c} < c$ d'où $c > 1$.

3. ($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde que $\inf(A) = 0$ et que A est majoré. Soit $M > 0$ un majorant de A.

   Méthode 1 : Appliquons la caractérisation de la borne inférieure pour $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$: puisque $\inf(A) = 0$, il existe $a \in A$, tel que $a < 0 + \varepsilon = \frac{1}{M}$. Puisque $a > 0$ et $M > 0$, $a < \frac{1}{M} \iff \frac{1}{a} > M$. Or comme A satisfait (1), $\frac{1}{a} \in A$. M étant un majorant de A, on doit avoir $\frac{1}{a} \leqslant M$. Contradiction. Ainsi, l'implication initiale est vraie.

   Méthode 2 : Montrons que $\frac{1}{M}$ est un minorant de A. Soit $a \in A$, alors comme $\frac{1}{a} \in A$ et puisque M majorant de A, on a donc $\frac{1}{a} \leqslant M$ d'où on a $a \geqslant \frac{1}{M}$ (car $a, M > 0$). Ainsi $\frac{1}{M}$ est un minorant de A. Comme 0 est la borne inférieure de A, c'est le plus grand des minorants de A, d'où $\frac{1}{M} \leqslant 0$. Or on sait que $\frac{1}{M} > 0$. Contradiction de nouveau.

   ($\Leftarrow$) Supposons que A ne soit pas majoré. Comme A est non vide et minoré par 0, par le théorème d'existence de la borne inférieure, $\inf(A)$ existe. Montrons que $\inf(A) = 0$ par double inégalité. Comme $\inf(A)$ est le plus grand des minorants et 0 minore A, on a $\inf(A) \geqslant 0$. Par l'absurde supposons que $\inf(A) > 0$. Comme A n'est pas majoré, il existe $a \in A$ tel que $a > \frac{1}{\inf(A)}$ et donc $\frac{1}{a} < \inf(A)$ (comme ces quantités sont strictement positives). Or $\frac{1}{a} \in A$, donc $\inf(A)$ ne peut être un minorant de A, ce qui est absurde. D'où $\inf(A) \leqslant 0$ et finalement $\inf(A) = 0$.

   On pouvait également démontrer la contraposée : $\inf(A) > 0$ implique A majoré.

Exercice 3

Soient $u, v, w \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ trois suites convergentes de limites respectives $\ell_u, \ell_v, \ell_w \in \mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} |u_n| \leqslant K, \\ |v_n| \leqslant K, \\ |w_n| \leqslant K. \end{cases}$$

2. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_n| - |\ell_u|| \leqslant |u_n - \ell_u|,$$

   et en déduire que $|u|$ tend vers $|\ell_u|$.

3. En déduire que $|\ell_u| \leqslant K$. On admet que de même $|\ell_v| \leqslant K$ et $|\ell_w| \leqslant K$.

4. Montrer que la suite uvw converge vers une limite que l'on précisera, avec les méthodes suivantes :

   a) en détaillant le ou les résultats du cours utilisés,

   b) en revenant à la définition de la convergence et à l'aide des questions 1. et 3..

Correction.

1. Comme u, v, w sont convergentes, elles sont bornées donc il existe $M_u, M_v, M_w > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M_u, \quad |v_n| \leqslant M_v, \quad |w_n| \leqslant M_w.$$

   Posons $K = \max(M_u, M_v, M_w)$. On a donc $K > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K$, $|v_n| \leqslant K$, $|w_n| \leqslant K$.

2. On a par inégalité triangulaire inverse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant ||u_n| - |\ell_u|| \leqslant |u_n - \ell_u|$. Puisque $u - \ell$ tend vers 0, on en déduit par le théorème des gendarmes que $|u| - |\ell_u|$ tend vers 0, *i.e.* $|u|$ tend vers $|\ell_u|$.

3. Comme $|u|$ converge vers $|\ell_u|$, l'inégalité $|\ell_u| \leqslant K$ découle du passage à la limite dans l'inégalité de la question 1. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K.$$

4. a) Comme u et v convergent respectivement vers ℓ_u et ℓ_v, alors par produit de suites convergentes, on obtient que uv converge vers $\ell_u \ell_v$. Comme uv converge vers $\ell_u \ell_v$ et w converge vers ℓ_w, alors de nouveau par produit de suites convergentes, uvw converge vers $\ell_u \ell_v \ell_w$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3K^2} > 0$. Comme u, v, w convergent respectivement vers ℓ_u, ℓ_v, ℓ_w, alors en appliquant la définition pour ε' on obtient

$$\begin{aligned}
&\exists N_u \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N_u,\, |u_n - \ell_u| < \varepsilon', \\
&\exists N_v \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N_v,\, |v_n - \ell_v| < \varepsilon', \\
&\exists N_w \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N_w,\, |w_n - \ell_w| < \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(N_u, N_v, N_w)$ on a

$$\begin{aligned}
|u_n v_n w_n - \ell_u \ell_v \ell_w| &= |(u_n - \ell_u) v_n w_n + \ell_u v_n w_n - \ell_u \ell_v \ell_w|, \\
&= |(u_n - \ell_u) v_n w_n + \ell_u (v_n - \ell_v) w_n + \ell_u \ell_v w_n - \ell_u \ell_v \ell_w|, \\
&= |(u_n - \ell_u) v_n w_n + \ell_u (v_n - \ell_v) w_n + \ell_u \ell_v (w_n - \ell_w)|, \\
&\leqslant |u_n - \ell_u||v_n||w_n| + |\ell_u||v_n - \ell_v||w_n| + |\ell_u||\ell_v||w_n - \ell_w|.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geqslant \max(N_u, N_v, N_w)$, en utilisant les inégalités obtenues en 1. et 3., on obtient que

$$|u_n v_n w_n - \ell_u \ell_v \ell_w| \leqslant |u_n - \ell_u| K^2 + |v_n - \ell_v| K^2 + K^2 |w_n - \ell_w|,$$

et donc finalement

$$|u_n v_n w_n - \ell_u \ell_v \ell_w| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

D'où la suite produit uvw converge vers $\ell_u \ell_v \ell_w$.