Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Partiel du 13/11/2024. Durée 1h30 ou 2h pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ satisfait la propriété (P) si l'assertion suivante est vraie

$$\text{(P)} \qquad \forall x, y \in A, \quad x < y \implies \exists z \in A,\, x < z < y.$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer dans chacun des cas suivants si l'ensemble considéré satisfait la propriété (P).

   a) $A_1 = \{a, b\}$. b) $A_2 =]a, b[\cup \{b+1\}$. c) $A_3 =]a, b] \cup \{b+1\}$.

2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. Montrer que A satisfait (P).
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble satisfaisant (P). Montrer que A n'est pas nécessairement un intervalle.

Exercice 2

Soit $A \subset \mathbb{R}_+^*$ non vide satisfaisant la propriété suivante

$$(1) \qquad \forall a \in A,\, \frac{1}{a} \in A.$$

1. Donner un exemple d'intervalle non vide de $\mathbb{R}_+^*$ satisfaisant (1), puis un exemple de sous ensemble non vide de $\mathbb{R}_+^*$ ne satisfaisant pas (1).
2. a) On suppose que A admet un maximum. Montrer que A admet un minimum et donner sa valeur.

   b) On suppose que $A = [b, c]$ avec $0 < b < c$. En déduire une relation entre b et c.
3. Montrer que $\inf(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas majoré.

Exercice 3

Soient $u, v, w \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ trois suites convergentes de limites respectives $\ell_u, \ell_v, \ell_w \in \mathbb{C}$.

1. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} |u_n| \leqslant K, \\ |v_n| \leqslant K, \\ |w_n| \leqslant K. \end{cases}$$

2. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ||u_n| - |\ell_u|| \leqslant |u_n - \ell_u|,$$

   et en déduire que $|u|$ tend vers $|\ell_u|$.
3. En déduire que $|\ell_u| \leqslant K$. On admet que de même $|\ell_v| \leqslant K$ et $|\ell_w| \leqslant K$.
4. Montrer que la suite uvw converge vers une limite que l'on précisera, avec les méthodes suivantes :

   a) en détaillant le ou les résultats du cours utilisés,

   b) en revenant à la définition de la convergence et à l'aide des questions 1. et 3..