Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Partiel du 7/11/2023. Durée 1h30 ou 2h pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Prétotal : 6.5 + 7 + 2.5 + 7.5 = 23.5, bonus rédaction globale : 1

Exercice 1 (∼25min) (6.5pt)

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite non majorée et $A = \{n \,/\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}\}$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_0 < u_n$.
2. Montrer que u n'est pas décroissante.
3. Montrer que A est non vide.
4. Montrer que A est minoré et non majoré.
5. Déterminer si A admet une borne inférieure et si A admet une borne supérieure.
6. Déterminer si A admet un minimum.

<u>Correction</u>.
6.5 = 0.5 + 0.5 + 1 + 2 + 1 + 1.5

Par exemple, si $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A = \mathbb{N}$. Plus généralement, si u est croissante, $A = \mathbb{N}$.

1. u est non majorée donc
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M\,.$$
Posons $M = u_0$ alors u étant non majorée, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > u_0$ d'où nécessairement $n \neq 0$ donc $n \in \mathbb{N}^*$. (.5pt)

2. Méthode 1 : u est décroissante si
$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ n \leqslant p \implies u_n \geqslant u_p\,.$$
Or d'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < n$ (donc $0 \leqslant n$) et $u_0 < u_n$ donc u n'est pas décroissante.
Méthode 2 : Supposons par l'absurde que u est décroissante. Alors par récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0$. D'où u est majorée par u_0. Contradiction. Donc u n'est pas décroissante. (.5pt)

3. u est décroissante si
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n\,.$$
Or d'après la question 2., u n'est pas décroissante donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} < u_{n_0+1}$, donc en particulier $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$. Ainsi $n_0 \in A$ et donc A est non vide. (1pt)

4. $A \subset \mathbb{N}$, donc 0 est un minorant de A et A est bien minorée (.5pt).
Supposons par l'absurde que A soit majoré par $M \in \mathbb{R}$ et posons $N = E(M) + 1$. Alors pour tout $n \in A$, $n \leqslant M < N$. Et donc pour tout $n \geqslant N$, $n \notin A$, *i.e.* $u_n > u_{n+1}$. Autrement dit, la suite est strictement décroissante à partir de N. Elle est alors majorée par $\max\{u_n \,/\, n \leqslant N\}$ (maximum d'un ensemble fini donc bien défini). Contradiction. Ainsi, A est non majoré. (1.5pt)

5. A est non vide et minoré donc d'après le théorème d'existence de la borne inférieure, celle-ci existe. (.5pt) A est non majoré donc n'admet pas de borne supérieure (car c'est un majorant). (.5pt)

6. A est non vide donc il existe $N \in A$. Alors $A_0 \doteq A \cap [\![0, N]\!] = \{n \in A \,/\, n \leqslant N\}$ est un ensemble fini non vide car $A_0 \subset [\![0, N]\!]$ et $N \in A_0$. Ainsi A_0 admet un minimum noté $m \in A_0$. L'élément m est un minorant de A car pour tout $n \in A$, soit $n \notin A_0$ et $n > N \geqslant m$, soit $n \in A_0$ et de nouveau $n \geqslant m$. Comme $m \in A$ puisque $m \in A_0 \subset A$, A admet m comme minimum. (1.5pt)

Exercice 2 (∼25min) (7pt)

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. On note $B = \{\frac{x+y}{2} \,/\, x, y \in A, x \neq y\}$.

1. Déterminer $\sup B$ quand $A = \{0, 2\}$.
2. Montrer que si $A =]0, 1[$, $B = A$.
3. On suppose que A n'admet pas de maximum. Montrer que $\sup B = \sup A$.

Correction.
$7 = 0.5 + 2.5 + 4$

1. On a $B = \{1\}$ donc B admet 1 comme maximum, donc également comme borne supérieure. (.5pt)

2. Montrons $B = A$ par double inclusion
($\subset$) Soit $b \in B$, alors il existe $x, y \in A$, avec $x \neq y$, tels que $b = \frac{x+y}{2}$. On a donc $0 = \frac{0+0}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$, d'où $b \in]0,1[= A$ (car $]0,1[$ est un intervalle), *i.e.* $B \subset A$. (1pt)
($\supset$) Soit $a \in A =]0,1[$. Par le lemme de réécriture, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset]0,1[$. Posons $x = a - \varepsilon$ et $y = a + \varepsilon$. On a donc $0 < x < a < y < 1$, i.e. $x, y \in]0,1[= A$ et $x \neq y$. De plus, $a = \frac{x+y}{2}$ donc $a \in B$ et ainsi, $B \subset A$. (1.5pt)

3. A est non vide et majoré donc d'après le théorème d'existence de la borne supérieure, A admet une borne supérieure (0.5pt).

Méthode 1.

1.25 pour montrer que $\sup(B)$ existe et $\sup(B) \leqslant \sup(A)$,
2.25 pour montrer par l'absurde que $\sup(B) \geqslant \sup(A)$.

De plus, A est infini car un ensemble fini et non vide admet un maximum. Donc A admet au moins deux éléments et en particulier, B est non vide (0.25pt).

Soit $b \in B$, alors il existe $x, y \in A$, $x \neq y$ tels que $b = \frac{x+y}{2}$. Comme $\sup(A)$ est un majorant de A, on a $x \leqslant \sup(A)$ et $y \leqslant \sup(A)$, donc $b \leqslant \frac{\sup(A)+\sup(A)}{2} = \sup A$. Ainsi B est majorée (par $\sup(A)$) (0.75pt). D'après le théorème d'existence de la borne supérieure, B admet une borne supérieure et $\sup B \leqslant \sup A$. (0.25pt)

Supposons par l'absurde que $\sup B < \sup A$. Alors $\sup B$ n'est pas un majorant de A donc il existe $x \in A$ tel que $\sup B < x$ (0.5pt). Puisque A n'admet pas de maximum, on a $\sup A \notin A$ et donc $x < \sup A$ (0.5pt). Ainsi x ne peut être un majorant de A, donc il existe $y \in A$ tel que $x < y$ (0.5pt). En posant $b = \frac{x+y}{2}$, on a $b \in B$ car $x, y \in A$ et $x \neq y$. Et comme $x < b < y$, on a donc $\sup B < x < b$, ce qui contredit le fait que $\sup B$ est un majorant de B. D'où $\sup(B) \geqslant \sup(A)$ et donc $\sup(B) = \sup(A)$ (.75pt).

Méthode 2.

0.75 pour montrer $\sup(A)$ majorant de B,
2.75 pour trouver $b \in B$ tel que $\sup(B) - \varepsilon < b$.

Montrons que $\sup(B) = \sup(A)$ grâce à la caractérisation de la borne supérieure appliquée à B.

Soit $b \in B$, alors il existe $x, y \in A$, $x \neq y$ tels que $b = \frac{x+y}{2}$. Comme $\sup(A)$ est un majorant de A, on a $x \leqslant \sup(A)$ et $y \leqslant \sup(A)$, donc $b \leqslant \frac{\sup(A)+\sup(A)}{2} = \sup A$. Ainsi $\sup(A)$ est un majorant de B (0.75pt).

Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure appliquée à A, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < x (\leqslant \sup(A))$ (0.5pt). Comme A n'admet pa de maximum, on a $x \neq \sup(A)$, *i.e.* $x < \sup(A)$ (0.5pt). Posons $\varepsilon' = \sup(A) - x > 0$, alors par la la caractérisation de la borne supérieure appliquée à A, il existe $y \in A$ tel que $x = \sup(A) - \varepsilon' < y$ (0.5pt). Ainsi on a $\sup(A) - \varepsilon < x < y$, d'où $\sup(A) - \varepsilon < \frac{x+y}{2}$ avec $\frac{x+y}{2} \in B$ car $x, y \in A$ et $x \neq y$ (0.75pt). Par la caractérisation de la borne supérieure appliquée à B, on obtient $\sup(B) = \sup(A)$ (0.5pt).

Exercice 3 (∼8min) (2.5pt)

Soient u, v, w , $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(t_n)$.

Montrer que $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n t_n)$.

Correction.
Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(\delta_n)_{n\geqslant N}$ une suite convergeant vers 1 tels que pour tout $n \geqslant N$, $u_n = \delta_n v_n$. Comme $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N'}$ une suite convergeant vers 0 tels que pour tout $n \geqslant N'$, $w_n = \varepsilon_n t_n$. (1.25pt)

Posons $N'' = \max(N, N')$ et pour tout $n \geqslant N''$, $\varepsilon''_n = \delta_n \varepsilon_n$. Alors pour tout $n \geqslant N''$, on a $u_n w_n = (\delta_n \varepsilon_n) v_n t_n$. Par produit de suites convergentes, la suite $(\varepsilon''_n)_{n\geqslant N''}$ tend vers 0. Ainsi, $u_n w_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n t_n)$. (1.25pt)

Exercice 4 (∼30min) (7.5pt)
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u est strictement croissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer, à l'aide du théorème de la limite monotone, que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.
3. En distinguant les cas $\ell \notin \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, montrer que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Correction.
7.5 = 2 + 2 + 3.5

1. Comme la suite u est strictement croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. Comme la fonction partie entière est croissante, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(u_n) \leqslant E(u_{n+1})$. Ainsi $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. (.5pt)

   Comme u converge, u est bornée donc majorée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Comme E est croissante, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(u_n) \leqslant E(M)$. D'où $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. (1pt)

   La suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc par le théorème de la limite monotone, elle converge. (.5pt)

2. Méthode 1. Puisque u est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle est majorée par sa limite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \ell$. Alors $u_{N+1} > u_N = \ell$ car u est strictement croissante, c'est absurde. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$. (2pt)

   Méthode 2 (preuve directe sans TLM). Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant \ell$. Alors comme u est strictement croissante, on a pour tout $n \geqslant N+1$, $u_n \geqslant u_{N+1} > u_N \geqslant \ell$. En passant à la limite dans la première inégalité, on obtient donc, comme u converge vers ℓ, $\ell \geqslant u_{N+1} > u_N \geqslant \ell$. C'est absurde. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$. (2pt)

3. 2 pour le cas $\ell \notin \mathbb{Z}$,
   1.5 pour le cas $\ell \in \mathbb{Z}$.

   Supposons que $\ell \notin \mathbb{Z}$. Alors on a $E(\ell) < \ell < E(\ell) + 1$ et donc il existe, par le lemme de réécriture, $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subset]E(\ell), E(\ell) + 1[$ (0.75pt). Comme u converge vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ (0.5pt). On a donc pour tout $n \geqslant N$, $E(\ell) < u_n < E(\ell) + 1$, d'où par définition de la partie entière $E(u_n) = E(\ell)$. Ainsi $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. (.75pt)

   Supposons maintenant $\ell \in \mathbb{Z}$. Comme u converge vers ℓ, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$ d'après 2., il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ $u_n \in]\ell - 1, \ell[$ (on a utilisé $\varepsilon = 1$) (1pt). Puisque $\ell \in \mathbb{Z}$, par définition de la partie entière, on a donc pour tout $n \geqslant N$, $E(u_n) = \ell - 1$. D'où $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de nouveau stationnaire. (.5pt)

   On a donc bien montré dans tous les cas que $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.