Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Partiel du 7/11/2023. Durée 1h30 ou 2h pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (∼25min) (6.5pt)

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite non majorée et $A = \{n \,/\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}\}$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_0 < u_n$.
2. Montrer que u n'est pas décroissante.
3. Montrer que A est non vide.
4. Montrer que A est minoré et non majoré.
5. Déterminer si A admet une borne inférieure et si A admet une borne supérieure.
6. Déterminer si A admet un minimum.

Exercice 2 (∼25min) (7pt)

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$. On note $B = \{\frac{x+y}{2} \,/\, x, y \in A, x \neq y\}$.

1. Déterminer $\sup B$ quand $A = \{0, 2\}$.
2. Montrer que si $A =]0, 1[$, $B = A$.
3. On suppose que A n'admet pas de maximum. Montrer que $\sup B = \sup A$.

Exercice 3 (∼8min) (2.5pt)

Soient u, v, w , $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(t_n)$.

Montrer que $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n t_n)$.

Exercice 4 (∼30min) (7.5pt)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u est strictement croissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer, à l'aide du théorème de la limite monotone, que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$.
3. En distinguant les cas $\ell \notin \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$, montrer que la suite $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.