Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Analyse 3 - Groupe 1 - Interro n°3

Durée 24min ou 32min pour 1/3 temps. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (6.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(2^n) = 1.$$

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Si f admet une limite en $+\infty$, que vaut-elle ? Justifier.

2. Montrer que f n'est pas négative dans un voisinage de $+\infty$. Est-elle par contre positive dans un voisinage de $+\infty$?

Correction.

1. Supposons que f admet une limite notée $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$ et donc par la caractérisation séquentielle de la limite, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ. Or $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante valant 1, donc converge vers 1. Par unicité de la limite, on obtient $\ell = 1$.

Ainsi si f admet une limite en $+\infty$, celle-ci vaut nécessairement 1.

1.25pt pour la formalisation de la caractérisation séquentielle (avec 0.25pt pour la mention du nom du thm).

0.75pt pour la conclusion (avec 0.25 pour la mention "unicité de la llimite")

2. Supposons par l'absurde que f est localement négative en $+\infty$. Alors il existe V un voisinage de $+\infty$ tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant 0$. Comme V est un voisinage de $+\infty$, alors il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $]B, +\infty[\subset V$. Puisque $2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $2^n > B$, d'où $2^n \in]B, +\infty[\subset V$, d'où $f(2^n) \leqslant 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n) = 1 > 0$. Contradiction. Donc f n'est pas négative dans un voisinage de $+\infty$.

0.5pt pour la déf. quelque part de négatif dans un vois. $+\infty$

1.5pt pour le reste du raisonnement.

Rien ne permet d'affirmer que la fonction f serait positive dans un voisinage de $+\infty$. On sait seulement que les valeurs prises de f sur l'ensemble $\{2^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ sont strictement positives, mais rien ne dit ce que vaut f en dehors de cet ensemble. Il suffit de construire un contre exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n) = 1$ et pour tout $x \notin \{2^n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = -1$. On donne à f la valeur -1 en dehors des 2^n pour $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n + 1) = -1$ et comme $2^n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par un raisonnement similaire à celui effectué en début de question, on montre (par l'absurde) que f n'est pas positive dans un voisinage de $+\infty$.

0.5pt pour l'intuition. 2pt pour la construction d'un contre-exemple et montrer qu'il fonctionne.

Exercice 2 (4.5pt)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. On suppose que $\mathcal{L}$ est non vide et majoré. On souhaite montrer que u est convergente.

1. Montrer que u est majorée. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*

2. Conclure.

Correction.

1. Par hypothèse, l'ensemble $\mathcal{L}$ est majoré, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\ell \in \mathcal{L}$, $\ell \leqslant M$ (0.5pt).

Supposons par l'absurde que u n'est pas majorée. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M + 1$. Or u est croissante donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > M + 1$ (1pt).

Soit $\ell \in \mathcal{L}$, alors par définition il existe φ extractrice tel que u_φ tend vers ℓ. Soit $\varepsilon = 1$, ainsi par définition il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, on a $\ell - 1 < u_{\varphi(n)} < \ell + 1$ (1.5pt).

Par conséquent, dès que $n \geqslant \max(N, N')$, on a

— $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$, donc $u_{\varphi(n)} > M + 1$,

— $n \geqslant N'$, donc $u_{\varphi(n)} < \ell + 1 \leqslant M + 1$.

Ce qui est absurde, puisque ces deux points ne peuvent être vérifiés en même temps (1.5pt).

D'où la suite u est majorée.

En résumé :

0.5pt pour la traduction de l'hypothèse $\mathcal{L}$ majorée.

1pt pour la traduction / utilisation appropriée de l'hyp. par absurde u non majorée et croissant.

1pt pour la traduction / utilisation de la convergence d'une suite extraite de u.

1.5pt pour la finalisation du raisonnement.

> Remarque après la correction. L'énoncé de cet exercice n'est pas faux, ni la correction proposée. Cependant il apparaît après vous avoir corrigé qu'il était mal posé. En fait il suffit de supposer que u admette une valeur d'adhérence et soit croissante pour obtenir sa convergence. L'hypothèse que l'ensemble des valeurs d'adhérence est majorée est donc totalement inutile. Certain.es d'entre vous l'ont bien identifié, bravo ! Je vous propose ci-dessous une correction "optimale" [a] de cet exercice avec les hypothèses minimales.
>
> Supposons que u est croissante et admet une valeur d'adhérence que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant \ell + \varepsilon$. Alors comme u est croissante, pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n \geqslant u_N \geqslant \ell + \varepsilon$. Or comme ℓ est une valeur d'adhérence de u, il existe φ extractrice telle que u_φ converge vers ℓ. Ainsi il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, $\ell - \varepsilon < u_{\varphi(n)} < \ell + \varepsilon$. Par conséquent, pour $n \geqslant \max(N, N')$, on a à la fois $u_{\varphi(n)} < \ell + \varepsilon$ et puisque $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$ également $u_{\varphi(n)} \geqslant \ell + \varepsilon$. C'est impossible ! D'où pour tout $n \geqslant N$, $u_n < \ell + \varepsilon$. Enfin comme $\ell - \varepsilon < u_{\varphi(N')}$ et u croissante, pour tout $n \geqslant \varphi(N')$, on a $\ell - \varepsilon < u_{\varphi(N')} \leqslant u_n$. Donc si on résume : pour tout $n \geqslant \max(N, \varphi(N'))$, on a $\ell - \varepsilon < u_{\varphi(n)} < \ell + \varepsilon$. On a bien prouvé que u converge (vers ℓ).
>
> [a] La démonstration ci-dessous n'est pas la seule possible ! Sa particularité est de se passer du théorème de la limite monotone. On pourrait très bien montrer dans le même esprit que les questions de l'exercice que u n'est pas majorée grâce aux hypothèses, puis conclure avec ce théorème que u converge.

2. La suite u est croissante et majorée, donc par le théorème de la limite monotone, on a u converge (0.5pt).

Exercice 3 (Non évalué)

Soit $T > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose que f est continue sur $[0, T[$. Montrer, à l'aide de la caractérisation séquentielle de la continuité, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que f est continue en x.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers x. Montrons que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x)$. Posons $k = E\left(\frac{x}{T}\right) \in \mathbb{Z}$, alors $x - kT \in [0, T[$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors définissons $v_n = u_n - kT$. La suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $x - kT \in [0, T[$. Comme f est continue sur $[0, T[$, f est donc continue en $x - kT$, d'où par la caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(x - kT)$. Or la fonction f est T-périodique donc

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = f(u_n - kT) = f(u_n)$,

— $f(x - kT) = f(x)$.

Ainsi on a prouve que la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Par la caractérisation séquentielle de la continuité, on déduit que f est continue en x.