Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
L2 Mathématiques et Applications
2023-2024

Analyse 3 - Groupe 3 - Interro n°3

Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Total : 11.5 = 3.5 + 3 + 5, bonus 1.5

Exercice 1 (3.5pt)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite admettant une valeur d'adhérence $\ell < 0$. Montrer que u admet une sous-suite strictement négative.

Correction.
Méthode 1. Posons $I = \{k \in \mathbb{N} \,/\, u_k < 0\}$ (0.5pt). Montrons que I est infini.

Posons $\varepsilon = -\ell > 0$, alors comme u admet ℓ comme valeur d'adhérence, il existe φ extractrice telle que u_φ converge vers ℓ et donc il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad u_{\varphi(n)} \in]\ell - \varepsilon, \underbrace{\ell + \varepsilon}_{=0}[,$$

d'où $u_{\varphi(n)} < 0$ (1.5pt). Ainsi I contient au moins l'ensemble $\{\varphi(n) \,/\, n \geqslant N_\varepsilon\}$ qui est infini car $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$, donc I est infini (0.75pt). Ainsi il existe ψ extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n) \in I$, i.e. $u_{\psi(n)} < 0$ (0.75pt).

Méthode 2. Construisons à la main une extractrice. Par définition, il existe φ une extractrice telle que u_φ tend vers ℓ. Posons $\varepsilon = -\ell > 0$. Puisque u_φ tend vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad u_{\varphi(n)} \in]\ell - \varepsilon, \underbrace{\ell + \varepsilon}_{=0}[,$$

d'où $u_{\varphi(n)} < 0$ (1.5pt). Posons alors $\psi : n \mapsto \varphi(n + N_\varepsilon)$. Par composition, ψ est strictement croissante, donc ψ est une extractrice et pour tout $n \geqslant N$, $\psi(n) = \varphi(n + N_\varepsilon) \geqslant n + N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon$. D'où on a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\psi(n)} < 0.$$

Ainsi, u_ψ est une sous-suite de u strictement négative (2pt).

Exercice 2 (3pt)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $D = [a, +\infty[$ et deux fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ continues en a. On suppose que $f(a) < g(a)$.

Montrer qu'il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in V \cap D$, $f(x) < g(x)$.

Correction.
Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(g(a) - f(a)) > 0$, alors $m = f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon$ est le point médian entre $f(a)$ et $g(a)$. Puisque f et g sont continues en a, on a

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]a - \eta, a + \eta[\cap D,\ f(x) < f(a) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists \eta' > 0,\ \forall x \in]a - \eta', a + \eta'[,\ g(a) - \varepsilon < g(x). \ (1.5pt)$$

Posons alors $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$ et $V =]a - \eta'', a + \eta''[$, alors V est un voisinage de x_0 et on a

$$\forall x \in V \cap D, \quad f(x) < m < g(x). \ (1.5pt)$$

Exercice 3 (5pt)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g \leqslant h$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = h(x_0) = \lim_{x\to x_0} h(x)$.

1. Illustrer graphiquement ces hypothèses puis montrer, en utilisant uniquement les définitions, que g est continue en x_0.

2. Question bonus. Est-ce que g est toujours continue en x_0 si on suppose seulement que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$? Justifier.

Correction.
5 = 3.5 + 1.5

1. Dessin : 0.75 pt

Comme $f \leqslant g \leqslant h$ et $f(x_0) = h(x_0)$ alors $g(x_0) = f(x_0) = h(x_0)$ (0.25pt).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = g(x_0)$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \underbrace{D_f}_{=\mathbb{R}}$, $g(x_0) - \varepsilon < f(x) < g(x_0) + \varepsilon$ (0.75pt). De même comme $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0) = g(x_0)$, il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta', x_0 + \eta'[\cap \underbrace{D_g}_{=\mathbb{R}}$, $g(x_0) - \varepsilon < h(x) < g(x_0) + \varepsilon$ (0.75pt).

Posons $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$, alors pour tout $x \in]x_0 - \eta'', x_0 + \eta''[$, on a

$$g(x_0) - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < g(x_0) + \varepsilon, \quad (0.75pt)$$

i.e. $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. On a bien montré que g est continue en x_0 (0.25pt).

2. L'hypothèse $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$ signifie que f et h admettent des limites en x_0 et que ces limites sont égales.

Or f admet une limite en x_0 appartenant à son domaine de définition est la définition de la continuité de f en x_0. Et nécessairement la limite de f en x_0 vaut $f(x_0)$ (cf CM). De même on a $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$ (et h continue en x_0).

Ainsi $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$ implique $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = h(x_0) = \lim_{x \to x_0} h(x)$. D'où d'après ce qui précède g est continue en x_0 (1.5pt).