

Nom :  
Prénom :  
No étudiant :

Université Paris Cité  
L2 Mathématiques et Applications  
2023-2024

## Analyse 3 - Groupe 3 - Interro n°3

*Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.  
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.*

### Exercice 1

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite admettant une valeur d'adhérence  $\ell < 0$ . Montrer que  $u$  admet une sous-suite strictement négative.

### Exercice 2

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $D = [a, +\infty[$  et deux fonctions  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  continues en  $a$ . On suppose que  $f(a) < g(a)$ .

Montrer qu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in V \cap D$ ,  $f(x) < g(x)$ .

### Exercice 3

Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f \leq g \leq h$  et soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On suppose de plus que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = h(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ .

- Illustrer graphiquement ces hypothèses puis montrer, en utilisant uniquement les définitions, que  $g$  est continue en  $x_0$ .
- Question bonus. Est-ce que  $g$  est toujours continue en  $x_0$  si on suppose seulement que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ ? Justifier.