Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Analyse 3 - Groupe 1 - Interro n°2

Durée 24min ou 32min pour 1/3 temps. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (2pt)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que u est positive à partir d'un certain rang et que $|u|$ tend vers $+\infty$. Montrer que u tend vers $+\infty$.

Correction.

Brouillon. Soit $M > 0$, comme $|u|$ tend vers $+\infty$, APCR on va avoir $|u_n| > M$, mais on sait aussi qu'APCR on a $u_n \geqslant 0$ i.e. $u_n = |u_n|$. Il suffit donc rassembler ces deux infos.

Soit $M > 0$. Comme $|u|$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|u_n| > M$ (0.5pt). Comme u est positive à partir d'un certain rang, il existe $N' \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N'$, $u_n \geqslant 0$ (0.5pt). Ainsi pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $u_n = |u_n| > M$. On a bien montré que u tend vers $+\infty$ (0.5pt).
0.5pt pour la cohérence globale du raisonnement.

Exercice 2 (3pt)

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limite respective ℓ_u et ℓ_v. On suppose que $\ell_u < \ell_v$. Montrer, uniquement à l'aide de la définition de la convergence, que la suite $u - v$ est négative à partir d'un certain rang.

Correction.

Brouillon. On intuite que $u-v$ tend vers $\ell_u - \ell_v < 0$, donc APCR $u-v$ va bien être négatif. Pour le montrer on va exploiter une inégalité APCR du type : $\ell_u - \ell_v - \varepsilon < u_n - v_n < \ell_u - \ell_v + \varepsilon$ que l'on va obtenir grâce à la CV de u et v vers ℓ_u et ℓ_v. Pour obtenir la négativité APCR, il suffit donc de choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\ell_u - \ell_v + \varepsilon < 0$, donc par exemple $\varepsilon = \frac{\ell_v - \ell_u}{2} > 0$. Rédigons !

Posons $\varepsilon = \frac{\ell_v - \ell_u}{2} > 0$. Comme u converge vers ℓ_u, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, on a $\ell_u - \frac{\varepsilon}{2} < u_n < \ell_u + \frac{\varepsilon}{2}$. De même, comme v converge vers ℓ_v, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_v$, on a $\ell_v - \frac{\varepsilon}{2} < v_n < \ell_v + \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour tout $n \geqslant \max(N_u, N_v)$, en sommant les inégalités membre à membre, on obtient

$$\ell_u - \ell_v - \varepsilon < u_n - v_n < \ell_u - \ell_v + \varepsilon,$$

or $\ell_u - \ell_v + \varepsilon = \frac{1}{2}(\ell_u - \ell_v) < 0$. D'où $u - v$ est strictement négative à partir du rang $\max(N_u, N_v)$.
0.5pt choix d'un ε cohérent.
1pt utilisation appropriée de la convergence de u et de v.
1.5pt finalisation du raisonnement.

Attention. Il fallait démarrer avec la convergence de u vers ℓ_u et la convergence de v vers ℓ_v, comme c'est demandé dans l'énoncé, et se débrouiller à partir de là. Il ne fallait pas être tenté d'utiliser un raccourci en disant par exemple que $u - v$ converge vers $\ell_u - \ell_v < 0$ et démarrer de là, car c'est se reposer sur le résultat de sommation des suites convergentes ! J'espère que je ne le lirai pas trop dans vos copies ! Cela sera pénalisé (probablement d'environ 1pt si tout le reste est bon).

Exercice 3 (Non évalué)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1 + x. \tag{1}$$

1. En utilisant (1), montrer, à l'aide uniquement de la définition de la convergence, que la suite $e^u = (e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Toujours en se basant sur (1), proposer une seconde démonstration.

Correction.

1. Brouillon. Soit $M > 0$, on veut APCR $e^{u_n} > M$. Or $e^{u_n} \geqslant 1 + u_n \geqslant 1 + M'$ dernière inégalité étant vraie pour n'importe quel $M' > 0$ APCR. En posant $M' = \max(M-1, 1)$, $M' > 0$ et $M' \geqslant M - 1$.

Soit $M > 0$. Comme u tend vers $+\infty$, en appliquant la définition pour $M' = \max(M-1, 1) > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n > \max(M-1, 1) \geqslant M - 1$. Ainsi pour tout $n \geqslant N$, $e^{u_n} \geqslant 1 + u_n > M$. On a bien montré que e^u tend vers $+\infty$.

2. Comme u tend vers $+\infty$, c'est aussi le cas de la suite $1+u$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{u_n} \geqslant 1+u_n$, donc par passage à la limite dans l'inégalité, on a e^u tend vers $+\infty$.