Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
L2 Mathématiques et Applications
2023-2024

Analyse 3 - Groupe 3 - Interro n°2

Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

+1pt : rédaction et cohérence mathématiques (respect nature des objets etc...)

Exercice 1 (4pt)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs convergeant vers $\ell > 0$. Montrer, à l'aide de la définition, que la suite $\frac{1}{u^2}$ converge vers $\frac{1}{\ell^2}$.

Correction.

Travail préparatif : 1.75, convergence de $\frac{1}{u^2}$: 2.25

Brouillon. On veut réussir à obtenir APCR : $\left|\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{\ell^2}\right| < \varepsilon$. Calculons

$$\left|\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{\ell^2}\right| = \left|\frac{u_n^2 - \ell^2}{u_n^2\ell^2}\right| = \left|\frac{(u_n-\ell)(u_n+\ell)}{u_n^2\ell^2}\right| = |u_n - \ell|\frac{u_n+\ell}{u_n^2\ell^2}.$$

Le terme $|u_n - \ell|$ va pouvoir être choisi arbitrairement petit par CV de u vers ℓ. Il nous faut donc réussir à majorer $\frac{u_n+\ell}{u_n^2\ell^2}$, donc majorer $u_n+\ell$ et minorer u_n^2. Or u_n peut-être choisi arbitrairement proche de ℓ pourvu que n suffisamment grand (de nouveau par CV de u). En particulier, on peut imposer $\frac{\ell}{2} = \ell - \frac{\ell}{2} < u_n < \ell + \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2}\ell$. D'où APCR

$$\frac{u_n+\ell}{u_n^2\ell^2} \leqslant \frac{\frac{3}{2}\ell + \ell}{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\ell^2} = \frac{10}{\ell^3}.$$

On va donc imposer APCR $|u_n - \ell| < \frac{\ell^3}{10}\cdot\varepsilon$.

On doit donc introduire un rang à partir duquel $|u_n - \ell| < \frac{\ell^3}{10}\varepsilon$, puis un rang à partir duquel $\frac{\ell}{2} < u_n < \frac{3}{2}\ell$, puis se placer pour n au delà de ces deux rangs et effectuer les majorations esquissées. Rédigeons rigoureusement ce raisonnement.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon\ell^3}{10}$ (1pt). De même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $\ell - \frac{\ell}{2} < u_n < \ell + \frac{\ell}{2}$ i.e. $\frac{\ell}{2} < u_n < \frac{3\ell}{2}$ (0.75pt).

La suite $\frac{1}{u^2}$ est bien définie car u est à termes strictement positifs (0.25pt). Posons $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$. Soit $n \geqslant N$ (0.25pt), alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{\ell^2}\right| &= \left|\frac{u_n^2 - \ell^2}{u_n^2\ell^2}\right| = \left|\frac{(u_n-\ell)(u_n+\ell)}{u_n^2\ell^2}\right|, \quad (0.5pt)\\
&< |u_n - \ell|\frac{|u_n+\ell|}{\frac{\ell^2}{4}\ell^2} \quad \text{(car } u_n > \tfrac{\ell}{2} \text{ et } x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \tfrac{1}{x^2} \text{ est strictement décroissante)}, \ (0.5pt)\\
&= \frac{\varepsilon\ell^3}{10}\cdot\frac{4(u_n+\ell)}{\ell^4} \quad \text{(car } u_n > 0 \text{ et } \ell > 0 \text{ donc } |u_n+\ell| = u_n + \ell, \ (0.25pt)\\
&< \frac{\varepsilon\ell^3}{10}\cdot\frac{10}{\ell^3} = \varepsilon \quad \text{(car } u_n < \tfrac{3\ell}{2}). \ (0.25pt)
\end{aligned}$$

On a donc bien obtenu $\left|\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{\ell^2}\right| < \varepsilon$. Ainsi la suite $\frac{1}{u^2}$ converge bien vers $\frac{1}{\ell^2}$ (0.25pt).

Exercice 2 (2.75pt)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles croissantes. On suppose de plus qu'elles sont positives à partir d'un certain rang.

Montrer que la suite uv est croissante à partir d'un certain rang.

Correction.

Brouillon. On veut montrer uv croissante APCR donc on s'intéresse naturellement à la quantité $u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n$ et on aimerait montrer qu'elle est positive. On remarque que $u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = (u_{n+1} - u_n)v_{n+1} + u_n(v_{n+1} - v_n)$ (cette manipulation arithmétique a été vue dans le TD2, Exercice 6 lorsque l'on a étudié le produit de deux suites convergentes). Or on sait que u et v sont croissantes, donc on a déjà $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. Il nous reste à justifier que v_{n+1} et u_n sont des quantités positives. Il nous reste une hypothèse non utilisée : u et v positives APCR. Il suffit donc introduire un rang à partir duquel les deux suites sont positives, et on obtient qu'à partir de ce rang $u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n \geqslant 0$, i.e. la conclusion souhaitée. Rédigeons proprement ce raisonnement.

Comme u et v sont positives APCR, il existe respectivement $N_u \in \mathbb{N}$ et $N_v \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N_u$, on ait $u_n \geqslant 0$ et pour tout $n \geqslant N_v$, on ait $v_n \geqslant 0$ (0.75pt).

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n = (u_{n+1} - u_n)v_{n+1} + u_n(v_{n+1} - v_n), \ (0.5pt)$$

Comme u et v sont croissantes, alors $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ (0.5pt).

Si $n \geqslant \max(N_u, N_v)$, alors $u_n \geqslant 0$ et $v_{n+1} \geqslant 0$, et par conséquent $u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n \geqslant 0$ (0.75pt). On a donc bien montré qu'à partir du rang $\max(N_u, N_v)$, uv est croissante (0.25pt).

Exercice 3 (2.25pt)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle satisfaisant

$$\forall A > 1, \forall n > A^2, u_n > \sqrt{A}. \tag{1}$$

1. Rappeler la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$.
2. Pour tout $A > 1$, donner l'expression d'un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $u_n > \sqrt{A}$.
3. Montrer que u tend vers $+\infty$.

Correction.

0.75 + 0.75 + 0.75

1. Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors v tend vers $+\infty$ si et seulement si
$$\forall A > 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, v_n > A. \ (0.75pt)$$
2. Soit $A > 1$, par (1) on pour tout $n > A^2$, $u_n > \sqrt{A}$. Ainsi pour $N = E(A^2) + 1 \in \mathbb{N}$, on a $N > A^2$ (par définition de la partie entière). Donc pour tout $n \geqslant N > A^2$, on a $u_n > \sqrt{A}$ (0.75pt).
3. Soit $A > 1$. Pour $A' = A^2 > 1$, alors pour tout $n > A'^2 = A^4$, on a $u_n > \sqrt{A'} = A$. En posant, $N = E(A^4) + 1$, on a donc pour tout $n \geqslant N$, $u_n > A$, i.e. u tend vers $+\infty$ (0.75pt).