Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Analyse 3 - Groupe 2 - Interro n°2

Durée 30min. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (3pt)

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que

— u est bornée,

— l'image de v est un ensemble fini,

— v ne s'annule pas.

Justifier que la suite $\frac{u}{v}$ est bien définie et montrer ensuite qu'elle est bornée.

Correction.
Comme v ne s'annule pas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ et donc $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie (0.25pt).

Comme $v(\mathbb{N})$ est finie, c'est aussi le cas de l'ensemble $A = \{|v_n| \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. Donc A admet un minimum et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \geqslant \min(A) > 0$ car v ne s'annule pas (1.25pt). Puisque u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ (0.75pt). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \frac{M}{\min(A)}, \text{ (0.75pt)}$$

d'où $\frac{u}{v}$ est bien bornée.

Exercice 2 (3pt)

Soient u et v deux suites convergentes de limite respective ℓ_u et ℓ_v. Montrer, uniquement à l'aide de la définition de la convergence, que la suite $(\frac{u_n-3v_n}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Correction.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers ℓ_u, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $|u_n - \ell_u| < \varepsilon$. Comme v converge vers ℓ_v, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_v$, $|v_n - \ell_v| < \frac{\varepsilon}{3}$ (1.5pt).

Ainsi pour tout $n \geqslant \max(N_{u,v})$, on a donc

$$\left|\frac{u_n-3v_n}{2} - \frac{\ell_u - 3\ell_v}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}(u_n-\ell_u) - \frac{3}{2}(v_n-\ell_v)\right| \underset{\text{inég. triangulaire}}{\leqslant} \frac{1}{2}|u_n-\ell_u| + \frac{3}{2}|v_n-\ell_v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où la suite $\frac{u-3v}{2}$ converge vers $\frac{\ell_u-3\ell_v}{2}$ (1.5pt).

Exercice 3 (3pt)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que u satisfait

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |\arctan(u_n)| < \varepsilon.$$

Montrer, uniquement à l'aide de la définition de la convergence, que u converge vers 0.

Correction.
Brouillon. Observation initiale : arctan est déf sur $\mathbb{R}$ donc pas de problème pour écrire $\arctan(u_n)$.

Par hyp, pour tout $\varepsilon' > 0$, APCR $-\varepsilon' < \arctan(u_n) < \varepsilon'$ donc par stricte croissance de tan, $\tan(-\varepsilon') < u_n < \tan(\varepsilon')$. Attention ici, on remarque que l'on peut avoir un soucis dans l'application de tan car ε' peut prendre des valeurs interdites et tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Il va peut-être falloir prendre des précautions sur ε'. Gardons cela et tête et continuons, comme tan est impaire, on a donc APCR $-\tan(\varepsilon') < u_n < \tan(\varepsilon')$. On est très proche de l'objectif qui est pour tout $\varepsilon > 0$, APCR on a $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$, car en choisissant dès le début $\varepsilon' = \arctan(\varepsilon)$, on obtient bien l'inégalité souhaitée. C'est ce que l'on va faire dans la rédaction ci-dessous ! Notez également qu'avec le choix $\varepsilon' = \arctan(\varepsilon)$, $\varepsilon' \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc on peut appliquer tan sans soucis.

Soit $\varepsilon > 0$, en appliquant l'hypothèse (1) avec $\varepsilon' = \arctan(\varepsilon) > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant N$, $|\arctan(u_n)| < \arctan(\varepsilon)$, i.e. $-\arctan(\varepsilon) < \arctan(u_n) < \arctan(\varepsilon)$. Par définition de arctan, on a $\arctan(\varepsilon) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc on en appliquant tan qui est la fonction réciproque de arctan, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et impaire, on obtient $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$. On a bien prouvé que u converge vers 0.