Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Analyse 3 - Groupe 1 - Interro n°1

Durée 24min ou 32min pour 1/3 temps. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (4.5pt)

Soit G une partie non vide de $\mathbb{R}$ stable par addition et par passage à l'opposé.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs ces deux propriétés de stabilité.
2. Soient $G_1 =]-1,1[$ et $G_2 = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Est-ce que G_1 satisfait les hypothèses de l'énoncé ? Idem pour G_2.
3. Montrer que $0 \in G$.
4. On suppose que $G \neq \{0\}$. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure.

Correction.
4.5 = 0.5 + 1.5 + 1 + 1.5

1. La propriété de stabilité par addition s'écrit
$$\forall x \in G, \forall y \in G, x+y \in G, \ (0.25pt)$$
et celle par passage à l'opposé
$$\forall x \in G, -x \in G. \ (0.25pt)$$

2. G_1 satisfait la propriété de stabilité par passage à l'opposé. Par contre il n'est pas stable par sommation puisque $\frac{1}{2} \in G_1$ mais $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \notin G_1$ (0.5pt).

Soit $(x,y) \in G^2$, alors il existe $(j,k) \in \mathbb{Z}$ tel que $x = j\sqrt{2}$ et $y = k\sqrt{2}$. On a $x+y = (j+k)\sqrt{2} \in \sqrt{2}\mathbb{Z}$, d'où G_2 est stable par addition. Puis on a $-x = -j\sqrt{2} \in \sqrt{2}\mathbb{Z}$, d'où G_2 est également stable par passage à l'inverse (1pt).

3. Comme G est non vide, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in G$. Comme G est stable par passage à l'opposé, on a $-x \in G$. Puis comme G est stable par addition, on a $0 = x + (-x) \in G$ (1pt).

4. Comme $G \neq \{0\}$, il existe $x \neq 0$ tel que $x \in G$. Si $x < 0$ alors comme G est stable par passage à l'opposé, on a $-x \in G$ et donc $-x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. Sinon $x > 0$ et $x \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. Dans tous les cas $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. De plus, cet ensemble est minoré par 0, donc par le théorème d'existence de la borne inférieure, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un inf (1.5pt).

Exercice 2 (3.75pt)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant chacune un maximum. On définit l'ensemble
$$A + B = \{a + b \,/\, a \in A, b \in B\}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $A = [0,1]$ et $B = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$. Déterminer $A+B$. Est-ce un intervalle ?
2. Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément et la borne supérieure de $A+B$.

Correction.
3.75 = 0.75 + 3

1. Notez que l'ensemble $A+B$ peut se réécrire de plusieurs manières équivalentes
$$A+B = \bigcup_{(a,b)\in A\times B} \{a+b\} = \bigcup_{b\in B}(A+b) = \bigcup_{a\in A}(a+B).$$
On a $A+B = \bigcup_{b\in B}(A+b)$ [1], d'où
$$A+B = \left([0,1]+\frac{3}{2}\right) \cup ([0,1]+2) = \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right] \cup [2,3] = \left[\frac{3}{2},3\right],$$
la dernière égalité étant vraie car $\frac{5}{2} > 2$. Ainsi $A+B$ est un intervalle.
0.75pt pour l'ensemble

2. Notons respectivement M_A et M_B les maxima de A et B. Ainsi

1. Soit $b \in B$, la notation $A+b$ est un abus de langage mathématique couramment utilisé. On a $A+b = \{a+b \,/\, a \in A\}$. On devrait écrire plus rigoureusement $A+\{b\}$.

(a) $\forall a \in A, a \leqslant M_A$,

(b) $\forall b \in B, b \leqslant M_B$,

(c) $M_A \in A$,

(d) $M_B \in B$.

Soit $x \in A + B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Donc par 2.a et 2.b, on a $x = a + b \leqslant M_A + M_B$. Ainsi l'ensemble $A + B$ est majoré par $M_A + M_B$. De plus $M_A + M_B \in A + B$ par 2.c et 2.d. Donc $M_A + M_B$ est le maximum de $A + B$.

Comme $A+B$ admet un maximum, alors $A+B$ admet une borne supérieure et $\sup(A+B) = \max(A+B) = M_A + M_B$.

1pt pour la traduction des hypothèses,
0.25pt pour la traduction de $x \in A + B$,
0.25pt pour la majoration de $a + b$,
0.75pt pour conclure et déterminer le max de $A + B$,
0.75pt pour $\sup(A + B)$.

Exercice 3 (Non évalué)
On considère l'ensemble $A = \{|x + iy| \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leqslant 2\}$.

1. Dessiner l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| + |y| \leqslant 2\}$. Conjecturer la valeur de $\max(A)$.

2. Montrer que A admet un maximum et le déterminer.

Correction.

1. L'ensemble $B \subset \mathbb{R}^2$ est un losange de sommets : $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$.

Pour le voir, prenons $(x, y) \in B$ quelconque, alors il y a 4 possibilité pour le signe de x et y.

Par exemple si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, la contrainte $|x| + |y| \leqslant 2$ devient $x + y \leqslant 2$ soit $y \leqslant 2 - x$. Ainsi (x, y) se situe dans l'orthant [2] positif $(\mathbb{R}_+)^2$ et (x, y) est verticalement en dessous du point $(x, 2 - x)$ appartenant au graphe de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto 2 - t$.

Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, alors la contrainte devient $x - y \leqslant 2$ i.e. $y \geqslant x + 2$. Donc (x, y) appartient à l'orthant $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ et (x, y) est verticalement au dessus du point $(x, x + 2)$ appartement au graphe de la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t + 2$.

Les deux autres cas se traitent de la même manière.

Ainsi $\{x + iy \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leqslant 2\}$ est ce même losange mais dans le plan complexe. Le plus grand module d'un nombre complexe dans cet exemple semble donc être 2 (valeur atteinte en considérant les sommets). D'où on conjecture que $\max(A) = 2$.

Soient E, F deux ensembles quelconques. On rappelle que le graphe d'une fonction $f : E \to F$ est défini par

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \,/\, x \in E\}.$$

En particulier c'est un sous ensemble de $E \times F$. Lorsque $E = F = \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(f)$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Exercice : soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité i.e. $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$. Est-ce que $\mathbb{S}^1$ est le graphe d'une fonction ?

2. Démontrons cette conjecture. On veut donc montrer que 2 est un majorant de A et $2 \in A$.

Soit $(x, y) \in B$, alors $|x + iy|^2 = x^2 + y^2 \leqslant (2 - |y|)^2 + y^2$, puisque $|x| \leqslant 2 - |y|$ et par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $t \in \mathbb{R} \mapsto t^2$. Donc $|x + iy|^2 \leqslant 4 - 4|y| + |y|^2 + \underbrace{y^2}_{=|y|^2} = 4 - 2|y|(2 - |y|)$. Or $|y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2$, d'où $-2|y|(2 - |y|) \leqslant 0$ et donc $|x + iy|^2 \leqslant 4$. Par conséquent 2 est bien un majorant de A. Puis $(0, 2) \in B$ et $|2i| = 2$, donc $2 \in A$.

On a ainsi prouvé que $\max(A) = 2$.

Exercice 4 (3.5pt) (Non retenu pour l'interro)
Soit $A = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Déterminer s'ils existent la borne inférieure, le minimum, la borne supérieure et le maximum de l'ensemble A.

---

2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Orthant

Correction.
On a 0 minorant de A et $0 \in A$ donc A admet un minimum et $\min(A) = 0$ (0.5pt). Comme A admet un minimum, il admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A) = 0$ (0.5pt).

Montrons que $\sup(A) = 1$ grâce à la caractérisation de la borne supérieure. On a bien que 1 est un majorant de A (0.25pt). Soit $\varepsilon > 0$.

— Si $\varepsilon \geqslant 1$ alors $1 - \varepsilon < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in A$ (0.5pt).

— Sinon $\varepsilon < 1$. Synthèse : il s'agit de trouver $a \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < 1-\varepsilon < a < 1$ car alors $a \in [0, 1[\cap\mathbb{Q} = A$. On peut tenter de chercher a de la forme $a = 1 - \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ qui doit donc satisfaire la contrainte $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon < 1$, soit $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Il suffit donc de prendre $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

  Posons $n = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Remarquons que $n \in \mathbb{N}^*$ car $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière on a donc, $n > \frac{1}{\varepsilon}$, d'où $\frac{1}{n} < \varepsilon$, soit encore $0 < 1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$. Et comme $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} < 1$. Puisque $1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$, on a bien $1 - \frac{1}{n} \in A$ (1.5pt).

Dans tous les cas, on a bien trouvé $a_\varepsilon \in A$ tel que $1 - \varepsilon < a_\varepsilon$. Donc par la caractérisation de la borne supérieure, on a $\sup(A) = 1$ (0.25pt).