Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Analyse 3 - Groupe 1 - Interro n°1

Durée 24min ou 32min pour 1/3 temps. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (4.5pt)

Soit G une partie non vide de $\mathbb{R}$ stable par addition et par passage à l'opposé.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs ces deux propriétés de stabilité.
2. Soient $G_1 =]-1, 1[$ et $G_2 = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Est-ce que G_1 satisfait les hypothèses de l'énoncé ? Idem pour G_2.
3. Montrer que $0 \in G$.
4. On suppose que $G \neq \{0\}$. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure.

Exercice 2 (3.75pt)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant chacune un maximum. On définit l'ensemble

$$A + B = \{a + b \,/\, a \in A, b \in B\}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $A = [0, 1]$ et $B = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$. Déterminer $A + B$. Est-ce un intervalle ?
2. Déterminer, s'ils existent, le plus grand élément et la borne supérieure de $A + B$.

Exercice 3 (Non évalué)

On considère l'ensemble $A = \{|x + iy| \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leqslant 2\}$.

1. Dessiner l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| + |y| \leqslant 2\}$. Conjecturer la valeur de $\max(A)$.
2. Montrer que A admet un maximum et le déterminer.

Exercice 4 (3.5pt) (Non retenu pour l'interro)

Soit $A = [0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Déterminer s'ils existent la borne inférieure, le minimum, la borne supérieure et le maximum de l'ensemble A.