Nom :
Prénom :
No étudiant :

Université Paris Cité
L2 Mathématiques et Applications
2023-2024

Analyse 3 - Groupe 3 - Interro n°1

Durée 30mn. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (3.25pt)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $x \in]a, b[$. Posons $A =]a, b[\setminus \{x\}$.

1. Construire deux points distincts dans A.

2. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de A.

Correction.

1. Posons $y_1 = \frac{a+x}{2}$ et $y_2 = \frac{x+b}{2}$. Alors $a < y_1 < x$ et $x < y_2 < b$, donc $y_1, y_2 \in A$ car $]a, x[$ et $]b, x[$ sont des intervalles et sont inclus dans A. De plus comme $y_1 < x < y_2$, on a $y_1 \neq y_2$ (1pt).

2. A admet une borne supérieure car A est non vide et majorée par b. On a en particulier $\sup(A) \leqslant b$ (0.5pt).

Montrons $\sup(A) = b$. Supposons par l'absurde que $\sup(A) < b$ (0.25pt). On a $y_2 \leqslant \sup(A)$ comme $\sup(A)$ majorant de A. Posons $y_3 = \frac{\sup(A)+b}{2}$, alors $x < y_2 \leqslant \sup(A) < y_3 < b$, donc $y_3 \in A$ comme $]x, b[\subset A$ et $]x, b[$ est un intervalle (1.25pt). Ceci contredit le fait que $\sup(A)$ est un majorant de A, donc $\sup(A) \geqslant b$, d'où $\sup(A) = b$ (0.25pt).

Exercice 2 (3.5pt)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On suppose que A admet un maximum et B un minimum. On définit l'ensemble

$$A - B \overset{\text{def.}}{=} \{a - b \,/\, a \in A, b \in B\}.$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $A =]1, 2]$ et $B = \{-1, 2\}$. Que vaut $A - B$?

2. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure et le plus grand élément de $A - B$.

Correction.
$3.5 = 0.5 + 3$

1. On a $-B = \{-2, 1\}$, donc $A - B =]-1, 0] \cup]2, 3]$ (0.5pt).

2. Notons M_A et m_B les réels représentant respectivement le maximum de A et le minimum de B. Posons $M = M_A - m_B$.

Soit $x \in A - B$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a - b$. Comme M_A est le maximum de A, on a donc $a \leqslant M_A$, et comme m_B est le minimum de B, on a $m_B \leqslant b$ d'où $-b \leqslant -m_B$. Par conséquent $x = a - b \leqslant M_A - m_B$. Donc M est un majorant de $A - B$ (1.5pt).

On a $M_A \in A$, car c'est le maximum de A, puis $m_B \in B$, car c'est le minimum de B (0.5pt). D'où $M = M_A - m_B \in A - B$ (0.25pt). Ainsi M est un majorant de $A - B$ et $M \in A - B$, d'où M est le maximum de $A - B$ (0.25pt).

Comme $A - B$ admet un maximum, alors $A - B$ admet une borne supérieure et $\sup(A - B) = M = \max(A) - \min(B)$ (0.5pt).

Exercice 3 (4pt)

Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble

$$A = \{u_n \ / n \in \mathbb{N}\} \cup \{v_n \ / n \in \mathbb{N}\},$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + 1$ et $v_n = e^{-n}$.

Correction.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n$ et $0 < v_n$ donc 0 est un minorant de A mais n'appartient pas à A (0.25pt). On intuite donc que A n'est pas majorée (donc pas de maximum ni de borne supérieure) et A n'admet pas de minimum mais une borne inférieure.

Montrons que A n'est pas majorée. Supposons l'absurde, qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ majorant de A, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$ et $v_n \leqslant M$ (0.5pt). Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{u_n}_{=n^3+1} = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$ (0.5pt). Contradiction.

Donc A n'est pas majorée, et donc n'admet pas de maximum ni de borne supérieure (0.5pt).

Montrons que $\inf(A) = 0$. Utilisons la caractérisation de la borne supérieure. On sait déjà que 0 est un minorant de A (0.25pt). Soit $\varepsilon > 0$, comme $v_n = e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_N < 0 + \varepsilon$, avec $v_N \in A$ (1pt). Donc d'après la caractérisation de la borne inférieure, A admet une borne inférieure et $\inf(A) = 0$ (0.5pt).

Comme $\inf(A) = 0 \notin A$, A ne peut admettre de minimum. En effet sinon on aurait $\min(A) = \inf(A) = 0$ et donc $0 \in A$ (0.5pt).