Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique
L2 Mathématiques et Applications 2024-2025

Analyse 3 - Groupe 2 - Interro n°1

Durée 30min. Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 (2pt)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée. Montrer que l'ensemble des majorants de A est un intervalle.

Correction.
1 pour déf intervalle,
1 reste du raisonnement

Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ deux majorants de A. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $M_1 \leqslant M \leqslant M_2$. Pour montrer que l'ensemble des majorants de A est un intervalle, il s'agit alors de montrer que M majore A.

Comme M_1 est un majorant de A, on a pour tout $x \in A$, $x \leqslant M_1$, d'où $x \leqslant M_1 \leqslant M$. M est bien un majorant de A. D'où la conclusion souhaitée.

Exercice 2 (1.5pt)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et non majorée. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A \cap]x, +\infty[\neq \varnothing.$$

Correction.
Méthode 1 : directe. Comme A est non majorée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a \in A$ tel que $a > x$ i.e. $a \in]x, +\infty[$. Ainsi $a \in A \cap]x, +\infty[$, d'où $A \cap]x, +\infty[$ est non vide (1.5pt).
Méthode 2 : par l'absurde. Raisonnons par l'absurde et supposons que la négation de la propriété soit vraie, i.e.

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad A \cap]x, +\infty[= \varnothing.$$

Cela signifie que pour tout $a \in A$, on a $a \notin]x, +\infty[$, i.e. $a \leqslant x$. On vient de montrer que x est un majorant de A. Or A est non majoré, d'où une contradiction. Par conséquent on a bien que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A \cap]x, +\infty[\neq \varnothing.$$

Exercice 3 (6.5pt)

Soit $a > 0$. On considère l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| = a\} \cup]a, 2a[$. Déterminer s'ils existent la borne inférieure, le minimum, la borne supérieure et le maximum de l'ensemble A.

Correction.
On a par définition de la valeur absolue $\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| = a\} = \{-a, a\}$, donc $A = \{-a\} \cup [a, 2a[$ (0.5pt).

L'élément $-a$ est un minorant de A car $-a < 0 < x$ pour tout $x \in [a, 2a[$. Puis $-a$ appartient à A donc A admet un minimum et $\min(A) = -a$. Comme A admet un minimum, A admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A) = -a$ (1.5pt).

On conjecture que A n'admet pas de maximum mais que $\sup(A) = 2a$. Utilisons la caractérisation de la borne supérieure pour montrer le dernier point.
0.5pt pour la présence (explicite ou implicite) des points à vérifier pour la caractérisation de la borne sup.
0.5pt pour $2a$ majorant de A.
0.5pt pour avoir pensé à la distinction des cas sur ε.
2pt pour le reste du raisonnement.
Il faut vérifier pour cela que

— $2a$ est un majorant de A,

— $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in A$, $2a - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Comme $\cancel{A = \{-a\} \cup]a, 2a[}$ $A = \{-a\} \cup [a, 2a[$ et $a > 0$, on a pour tout $x \in A$, $\cancel{x \leqslant 2a}$ $x < 2a$. Donc $2a$ est bien un majorant de A (0.5pt).

Soit $\varepsilon > 0$.

— Si $\varepsilon > a$, alors $2a - \varepsilon < a$ et on pose $x_\varepsilon = a \in A$

— Sinon si $\varepsilon \leqslant a$ alors $a \leqslant 2a-\varepsilon < 2a$, et comme $[a, 2a[$ est un intervalle inclus dans A, on a $2a-\varepsilon \in A$. Posons $x_\varepsilon = \frac{(2a-\varepsilon)+2a}{2}$ le point milieu entre $2a-\varepsilon$ et $2a$. On a donc $a \leqslant 2a-\varepsilon < x_\varepsilon < 2a$ et de nouveau comme $[a, 2a[$ est un intervalle inclus dans A, on a $x_\varepsilon \in A$.

On a bien montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, 2a - \varepsilon < x_\varepsilon,$$

d'où par la caractérisation de la borne supérieure, on a $\sup(A) = 2a$.

Démonstration alternative de $\sup(A) = 2a$ (par double inégalité). Comme $2a$ est un majorant de A, on a $\sup(A) \leqslant 2a$. Montrons que $\sup(A) \geqslant 2a$, pour cela supposons par l'absurde que $\sup(A) < 2a$. Alors par le lemme de réécriture, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_\varepsilon = \sup(A) + \varepsilon$ satisfait $\sup(A) < x_\varepsilon < 2a$. Comme $\sup(A)$ est un majorant de A et $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$. D'où $x_\varepsilon \in]a, 2a[\subset A$. Ainsi x_ε est un élément de A et $x_\varepsilon > \sup(A)$, c'est absurde. Donc on a bien $\sup(A) \geqslant 2a$ et finalement $\sup(A) = 2a$.

On a $\sup(A) = 2a \notin A$. Or si par l'absurde A admet un maximum, alors $\max(A) = \sup(A) = 2a$ et ainsi $2a \in A$. Contradiction. D'où A n'admet pas de maximum (1pt).