

License 2^{ème} année, Mathématiques et Applications ANALYSE 3

Examen du 07/01/2025. Durée 2h ou 2h40 pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (8pt)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Montrer que toutes les sous-suites de u sont bornées.
2. On note V_u l'ensemble des valeurs d'adhérence de u . Montrer que V_u est non vide et borné.
3. On suppose désormais que la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \frac{u_{2n+1}}{3},$$

converge vers 1. Notons ℓ une valeur d'adhérence u .

- a) Montrer que $3(\ell - 1)$ est également une valeur d'adhérence de u . *Indication : on pourra s'intéresser à la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et à une de ses sous-suites bien choisie.*
- b) On considère la suite $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3(a_n - 1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est une valeur d'adhérence de u .
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{3}{2} + 3^n \left(\ell - \frac{3}{2} \right)$.
- d) Dédurre des questions précédentes que $\ell = \frac{3}{2}$.
- e) Que dire de la convergence de u ? Vérifier la cohérence avec la limite de v .

Correction.

1. Puisque u est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. Soit φ une extractrice, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ (car $\varphi(n) \in \mathbb{N}$). La suite extraite u_φ est bien bornée. (.5pt)
2. Puisque u est une suite bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass u admet une valeur d'adhérence, donc V_u est non vide. (.5pt)
Soit $\ell \in V_u$. Il existe donc une extractrice φ telle que u_φ converge vers ℓ . En reprenant la constante M introduite à la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| \leq M$ i.e. $-M \leq u_{\varphi(n)} \leq M$. Par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient que $-M \leq \ell \leq M$ d'où $|\ell| \leq M$ (on aurait pu évoquer la continuité de $x \mapsto |x|$ en ℓ et la caractérisation séquentielle de la continuité pour passer directement à la limite dans $|u_{\varphi(n)}| \leq M$). Ainsi V_u est bien borné. (1pt)
3. a) Soit φ une extractrice telle que u_φ converge vers ℓ . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = 3(u_n - v_n)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2\varphi(n)+1} = 3(u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)})$. Posons $\psi : n \in \mathbb{N} \mapsto 2\varphi(n) + 1$. Puisque φ est strictement croissante, c'est aussi le cas de ψ , donc ψ est une extractrice. On a ainsi $u_\psi = 3(u_\varphi - v_\varphi)$ avec u_φ converge vers ℓ et v_φ converge vers 1 en tant que sous suite d'une suite convergeant vers 1. Ainsi par combinaison linéaire de suites convergentes, on a que u_ψ , suite extraite de u , converge vers $3(\ell - 1)$ et donc $3(\ell - 1)$ est une valeur d'adhérence de u . (2pt)
b) Montrons cette propriété par récurrence.
Initialisation. On a $a_0 = \ell$ et $\ell \in V_u$, donc la propriété est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_n \in V_u$. Alors d'après la question précédente, on a $3(a_n - 1) \in V_u$, or $3(a_n - 1) = a_{n+1}$, ce qui termine la récurrence. (1pt)

c) Méthode 1 : on raisonne à nouveau par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, $\frac{3}{2} + 3^n (\ell - \frac{3}{2}) = \ell = a_0$ donc la propriété est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_n = \frac{3}{2} + 3^n (\ell - \frac{3}{2})$. Alors par définition de a , $a_{n+1} = 3(a_n - 1) = 3(\frac{1}{2} + 3^n (\ell - \frac{3}{2})) = \frac{3}{2} + 3^{n+1} (\ell - \frac{3}{2})$, ce qui termine la récurrence. (1pt)

Méthode 2 : On reconnaît en $3^n (\ell - \frac{3}{2})$ le terme général d'une suite géométrique. Montrons donc que $(a_n - \frac{3}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a donc $a_{n+1} - \frac{3}{2} = 3(a_n - 1 - \frac{1}{2}) = 3(a_n - \frac{3}{2})$. La suite $(a_n - \frac{3}{2})_{n \in \mathbb{N}}$ est par conséquent géométrique de raison 3, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n - \frac{3}{2} = 3^n (a_0 - \frac{3}{2})$, soit $a_n = \frac{3}{2} + 3^n (\ell - \frac{3}{2})$.

d) Si $\ell > \frac{3}{2}$, respectivement $\ell < \frac{3}{2}$, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, respectivement $-\infty$. Donc dès que $\ell \neq \frac{3}{2}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée. Or cette suite est à valeurs dans V_u , par la question 3.b), qui est un ensemble bornée, par la question 2., donc nécessairement ce cas ne peut se produire. Ainsi $\ell = \frac{3}{2}$. (1pt)

e) La suite u est bornée et admet une unique valeur d'adhérence qui est $\frac{3}{2}$, donc u converge vers $\frac{3}{2}$. On en déduit que $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers $\frac{3}{2}$ et par opération sur les limites que v tend bien vers 1. (1pt)

Exercice 2 (5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \neq x$, alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x).$$

Proposer une illustration de votre raisonnement.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \neq 1$ tel que $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - \alpha x$ soit bornée. Montrer alors qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$.

3. Le résultat de la question précédente reste-il vrai lorsque $\alpha = 1$?

Correction.

1. Supposons par l'absurde la négation de l'assertion à prouver, à savoir qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) \leq x_1$ et il existe $x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_2) \geq x_2$. On obtient graphiquement que le graphe de f croise celui de la fonction identité car f est continue.

La fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(x_1) \leq 0$, $g(x_2) \geq 0$. Ainsi par le TVI il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ (ou $x_0 \in [x_2, x_1]$) tel que $g(x_0) = 0$ i.e. $f(x_0) = x_0$. C'est impossible par hypothèse. D'où la conclusion souhaitée. (1.5+.5pt)

2. Supposons par l'absurde pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \neq x$, alors d'après la question précédente

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x).$$

◇ Étudions le cas : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > (1 - \alpha)x$. Si $\alpha < 1$, alors $x \mapsto (1 - \alpha)x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $\lim_{+\infty} g = +\infty$, ce qui contredit le fait que g soit bornée. Si $\alpha > 1$, alors $x \mapsto (1 - \alpha)x$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient $\lim_{-\infty} g = +\infty$, ce qui contredit de nouveau le fait que g soit bornée.

◇ Étudions l'autre cas : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) < (1 - \alpha)x$. On déduit par un raisonnement similaire au précédent que g admet forcément une limite valant $-\infty$ (en $+\infty$ si $\alpha > 1$ et en $-\infty$ si $\alpha < 1$). Ce qui contredit de nouveau le fait que g est bornée.

Chaque cas mène à une contradiction. Donc il existe bien $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$. (2pt)

3. Le résultat est faux. Fournissons un contre-exemple. Considérons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1+x$ qui est continue sur $\mathbb{R}$, alors $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - x = 1$ est bien bornée. Cependant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x$ puisque $f(x) > x$. (1pt)

Exercice 3 (12pt)

Soient $u, v \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites et $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et strictement décroissante. On suppose que $f(u)$ tend vers 0 et que $f(v)$ tend vers $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) > 0$.
2. On note $\text{Im}(f)$ l'image de f . Montrer que

$$\forall y \in \text{Im}(f), \exists a > 0, \forall x > 0, f(x) < y \implies x > a.$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* / a < f(x) < b\}$ est un intervalle.
4. Déterminer, si ces quantités existent, $\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} f(x)$ et $\min_{x \in \mathbb{R}_+^*} f(x)$.
5. Montrer, en revenant à la définition, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
6. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \neq 1$. Montrer que f n'est pas continue. Illustrer votre raisonnement.
7. Déterminer, si elle existe, la limite de u . Illustrer votre raisonnement.
8. Déterminer, si elle existe, la limite de v .
9. Soit $A =]0, 1[\cap \text{Im}(f)$. On suppose que $\sup(A) = 1$. Expliquer comment interpréter cette propriété puis tracer un exemple de fonction satisfaisant toutes les hypothèses de l'exercice.

Correction.

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 0$. Soit $x > x_0$, puisque f est strictement décroissante, on a $f(x) < f(x_0) = 0$. C'est impossible car f est positive. D'où pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$. (.5pt)
2. Soit $y \in \text{Im}(f)$. Puisque $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x_0 > 0$ tel que $y = f(x_0)$. Posons $a = x_0$. Soit $x > 0$. Si $f(x) < f(x_0)$, alors par décroissance stricte de f , $x > x_0$. (.5pt)
3. Si E est vide, E est un intervalle. Sinon soient $x, y \in E$ et $z \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq z \leq y$. Puisque f est (strictement) décroissante, $f(x) \geq f(z) \geq f(y)$ donc $b > f(x) \geq f(z) \geq f(y) > a$ car $x, y \in E$ d'où $z \in E$. (1pt)
4. f étant positive, elle est minorée par 0. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(u)$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(u_N) < \varepsilon$. Ainsi, d'après la caractérisation de la borne inférieure, $\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} f(x)$ existe et vaut 0. On pouvait aussi utiliser la caractérisation séquentielle de la borne inférieure. (1pt)
D'après la première question, $0 \notin \{f(x) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ donc $\min\{f(x) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ n'existe pas. (.5pt)
5. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $f(u)$ tendant vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $-\varepsilon < f(u_N) < \varepsilon$. Or la fonction f est strictement décroissante, donc pour tout $x > u_N$, on a $f(x) < f(u_N) < \varepsilon$ et par positivité de f , on a donc $-\varepsilon < 0 \leq f(x) < \varepsilon$ i.e. $|f(x)| < \varepsilon$. On a bien prouvé que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. (1.5pt)
6. Puisque $f(v)$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(v_N) > 1$ et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) < 1$. Par l'absurde si f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors puisque $1 \in [f(x_0), f(v_N)]$, par le TVI il existe $x \in [v_N, x_0]$ tel que $f(x) = 1$. Ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé. Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (1.5+.5pt)
7. Montrons que u tend vers $+\infty$. Soit $M > 0$. Montrons qu'APCR, $u_n > M$. Or on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(u_n)| < \varepsilon$ APCR. Posons $\varepsilon = f(M) > 0$ ($f > 0$ d'après 1.). Puisque $f(u)$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|f(u_n)| < \varepsilon = f(M)$. Or par stricte décroissance de f , $f(u_n) < f(M)$ implique $u_n > M$. On a donc prouvé que pour tout $n \geq N$, $u_n > M$, soit u tend vers $+\infty$. (1.5+1pt)

8. Montrons que v tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $M = f(\varepsilon) > 0$. Puisque $f(v)$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f(v_n) > M = f(\varepsilon)$. Or par stricte décroissance de f , $f(v_n) > f(\varepsilon)$ implique $v_n < \varepsilon$. On a donc prouvé que pour tout $n \geq N$, $v_n < \varepsilon$ ce qui est équivalent à $|v_n| < \varepsilon$ car v est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La suite v tend bien vers 0. (1.5pt)

9. Il existe des images de f strictement plus petite que 1 et aussi proche de 1 que possible.

Pour tracer un exemple graphique, on sait de plus que f tend vers 0 en $+\infty$ et vers $+\infty$ en 0 et qu'elle est nécessairement discontinue car elle ne passe pas par 1 (cf question 6.). On peut tracer

par exemple le graphe de $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$. On a alors $\text{Im}(f) =]0, 1[\cup]2, +\infty[$ d'où $A =]0, 1[$ donc on a bien $\sup(A) = 1$. (1pt)