

License 2^{ème} année, Mathématiques et Applications
ANALYSE 3

Examen du 07/01/2025. Durée 2h ou 2h40 pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (8pt)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée.

1. Montrer que toutes les sous-suites de u sont bornées.
2. On note V_u l'ensemble des valeurs d'adhérence de u . Montrer que V_u est non vide et borné.
3. On suppose désormais que la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \frac{u_{2n+1}}{3},$$

converge vers 1. Notons ℓ une valeur d'adhérence u .

- a) Montrer que $3(\ell - 1)$ est également une valeur d'adhérence de u . *Indication : on pourra s'intéresser à la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et à une de ses sous-suites bien choisie.*
- b) On considère la suite $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3(a_n - 1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est une valeur d'adhérence de u .
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{3}{2} + 3^n \left(\ell - \frac{3}{2} \right)$.
- d) Dédurre des questions précédentes que $\ell = \frac{3}{2}$.
- e) Que dire de la convergence de u ? Vérifier la cohérence avec la limite de v .

Exercice 2 (5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \neq x$, alors

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x).$$

Proposer une illustration de votre raisonnement.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \neq 1$ tel que $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - \alpha x$ soit bornée. Montrer alors qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$.
3. Le résultat de la question précédente reste-il vrai lorsque $\alpha = 1$?

Exercice 3 (12pt)

Soient $u, v \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites et $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et strictement décroissante. On suppose que $f(u)$ tend vers 0 et que $f(v)$ tend vers $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) > 0$.
2. On note $\text{Im}(f)$ l'image de f . Montrer que

$$\forall y \in \text{Im}(f), \exists a > 0, \forall x > 0, f(x) < y \implies x > a.$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}_+^* / a < f(x) < b\}$ est un intervalle.
4. Déterminer, si ces quantités existent, $\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} f(x)$ et $\min_{x \in \mathbb{R}_+^*} f(x)$.
5. Montrer, en revenant à la définition, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

6. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \neq 1$. Montrer que f n'est pas continue. Illustrer votre raisonnement.
7. Déterminer, si elle existe, la limite de u . Illustrer votre raisonnement.
8. Déterminer, si elle existe, la limite de v .
9. Soit $A =]0, 1[\cap \text{Im}(f)$. On suppose que $\sup(A) = 1$. Expliquer comment interpréter cette propriété puis tracer un exemple de fonction satisfaisant toutes les hypothèses de l'exercice.