Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Examen du 08/01/2025. Durée 2h ou 2h40 pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soient A une partie bornée de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments.

1. Montrer que $\inf(A) \neq \sup(A)$.

2. a) Donner un exemple d'un tel ensemble A tel que $\max(A)$ existe et $\sup(A \setminus \{\max(A)\}) = \sup(A)$ (on précisera seulement les valeurs de ces quantités sans les justifier).

   b) Donner un exemple d'un tel ensemble A tel que $\max(A)$ existe et $\sup(A \setminus \{\max(A)\}) \neq \sup(A)$ (on précisera seulement les valeurs de ces quantités sans les justifier).

Soit $x \in A$ et notons $B = A \setminus \{x\}$.

3. Montrer que si $x > \inf(A)$, alors $\inf(B) = \inf(A)$.

4. Montrer que la contraposée de l'implication de la question 3. se réécrit (est équivalente à) :

$$\inf(B) > \inf(A) \quad \Rightarrow \quad x = \inf(A).$$

5. La réciproque de l'implication de la question 3. est-elle vraie ?

6. Montrer que si $\inf(B) > \inf(A)$, alors A admet un minimum.

7. On suppose que $x = \inf(A)$ et $\inf(A) = \inf(B)$. Montrer alors que A n'est pas un ensemble fini.

Correction

1. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, majorée et minorée (car bornée) donc d'après les théorèmes d'existence des bornes supérieure et inférieure, celles-ci existent. Par hypothèse, il existe $a, b \in A$ tels que $a < b$ donc $\inf(A) \leqslant a < b \leqslant \sup(A)$ car $\inf(A)$ est un minorant de A et $\sup(A)$ un majorant de A.

2. a) Posons $A = [0, 1]$, alors $\max(A) = \sup(A) = 1$ et $A \setminus \{\max(A)\} = [0, 1[$ dont le sup vaut toujours 1.

   b) Posons $A = \{0, 1\}$, alors $\max(A) = \sup(A) = 1$ et $A \setminus \{\max(A)\} = \{0\}$ donc le sup vaut 0 qui est bien différent de $\sup(A)$.

3. Supposons que $x > \inf(A)$. Posons $I = \inf(A)$. Ainsi, I est un minorant de A et pour tout $b \in B$, $b \in A$ donc $I \leqslant b$ et donc I est un minorant de B.

Méthode 1 (caractérisation de la borne inférieure). Soit $\varepsilon > 0$.

- Si $I + \varepsilon \leqslant x$, alors par la caractérisation de la borne supérieure appliquée à A, il existe $a \in A$ tel que $a < I + \varepsilon$. En particulier, $a < x$ et donc $a \in B$.
- Sinon $I + \varepsilon > x$. Comme $x > \inf(A)$, x n'est pas un minorant de A (car $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A), donc il existe $a \in A$ tel que $a < x$. En particulier $a < I + \varepsilon$. Et comme $a < x$, $a \in B$.

Dans tous les cas on a bien trouvé $a \in B$ tel que $a < I + \varepsilon$. Or I est un minorant de B donc par la caractérisation de la borne inférieure, on a $\inf(B) = I = \inf(A)$.

Méthode 2 (raisonnement par double inégalité).

($\geqslant$) B est non vide (car A contient au moins deux éléments), et I est un minorant de B donc par le théorème d'existence de la borne inférieure, B admet une borne inférieure et de plus $\inf(B) \geqslant I$ (car $\inf(B)$ est le plus grand des minorants de B).

($\leqslant$) Notons $I_B = \inf(B)$. Montrons que I_B est un minorant de A. Soit $y \in A$.

- Si $y \neq x$, alors $y \in B$ et donc $I_B \leqslant y$ puisque I_B est un minorant de B.

— Sinon $y = x$. Or $y = x > \inf(A)$, donc y n'est pas un minorant de A i.e. il existe $a \in A$ tel que $a < y$. Ainsi $a \in B$ et comme I_B est un minorant de B, on a $I_B \leqslant a < y$.

On a bien montré dans tous les cas que $I_B \leqslant y$, d'où I_B est un minorant de A. Puisque $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A, on a $I_B = \inf(B) \leqslant \inf(A)$.

Conclusion : $\inf(B) = \inf(A)$.

4. La contraposée s'écrit

$$\inf(B) \neq \inf(A) \quad \Rightarrow \quad x \leqslant \inf(A).$$

Or on sait que $\inf(B) \geqslant \inf(A)$ est toujours vraie, donc la propriété $\inf(B) \neq \inf(A)$ se réécrit de manière équivalente $\inf(B) > \inf(A)$. De plus, $x \geqslant \inf(A)$ est toujours vraie (car $\inf(A)$ est un minorant de A et $x \in A$), donc la propriété $x \leqslant \inf(A)$ se réécrit $x = \inf(A)$. La contraposée de l'implication vue en 3. est donc bien

$$\inf(B) < \inf(A) \quad \Rightarrow \quad x = \inf(A).$$

Cette assertion est vraie puisque l'implication en 3. a été prouvée comme juste.

5. La réciproque de 3. qui s'écrit

$$\inf(B) = \inf(A) \quad \Rightarrow \quad x > \inf(A),$$

est fausse. Donnons un contre-exemple. Prenons $A = [0, 1]$ et $x = 0$. Alors $B = A \setminus \{x\} =]0, 1]$ et $\inf(B) = 0 = \inf(A)$. Pourtant la conclusion $x > \inf(A)$ est fausse, puisque $x = 0 = \inf(A)$.

6. Si $\inf(B) > \inf(A)$, alors d'après l'implication établie comme vraie de la question 4., on a $x = \inf(A)$. Donc x est un minorant de A et comme $x \in A$, A admet un minimum et $\min(A) = x$.

7. Supposons par l'absurde que A soit un ensemble fini. Alors B est également un ensemble fini. Ainsi B admet un minimum et de plus $\inf(B) = \min(B)$. Comme $\inf(A) = \inf(B)$, on a donc $\inf(A) = \min(B)$. Or $x = \inf(A)$, d'où $x = \min(B)$ et donc $x \in B$. C'est impossible puisque $B = A \setminus \{x\}$. Ainsi A n'est pas un ensemble fini.

Exercice 2

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui tendent vers $+\infty$, et soit $\ell < 0$. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = +\infty$.

1. Est-ce que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$? Justifier.
2. La fonction f admet-elle une limite finie en $+\infty$? Justifier.
3. Tracer sur $\mathbb{R}_+$ l'allure du graphe d'une fonction respectant les hypothèses de l'énoncé. *Indication : on pourra supposer ici par exemple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$ et $v_n = 2n + 1$.*
4. Montrer que la suite $f(u) = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \{p \in \mathbb{N} \,/\, f(v_p) > n\}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est infini.
   b) Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(v_{\varphi(n)}) > n$.
6. Montrer que pour tout $B > 0$, il existe $a, b \in]B, +\infty[$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 1$.
7. En déduire que

$$\forall B > 0, \, \exists x > B, \, f(x) = 0.$$

8. En déduire qu'il existe une suite réelle w qui tend vers $+\infty$ et telle que $f(w)$ est la suite constante nulle.

Correction

1. Supposons par l'absurde que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$. Comme la suite u est à valeurs dans $D_f = \mathbb{R}$ et tend vers $+\infty$, par la caractérisation séquentielle de la limite on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty$. Or par hypothèse $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell \in \mathbb{R}$. Contradiction. Donc f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

2. Supposons par l'absurde que f admet une limite finie, notée $\ell' \in \mathbb{R}$, en $+\infty$. Comme la suite v est à valeurs dans $D_f = \mathbb{R}$ et tend vers $+\infty$, par la caractérisation séquentielle de la limite on a $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \ell' \in \mathbb{R}$. Or par hypothèse $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = +\infty$. Contradiction. Donc f n'admet pas une limite finie en $+\infty$.

3. On peut par exemple considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valant ℓ sur $\mathbb{R}_-$, puis linéaire par morceaux reliant les valeurs pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = \ell$ et $f(2n+1) = n$.

4. Soit $\varepsilon = -\frac{\ell}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$, il existe $N_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_u$, $|f(u_n) - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_u$, $f(u_n) < \frac{\ell}{2} < 0$. La suite $f(u)$ est bien strictement négative à partir d'un certain rang.

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = +\infty$, il existe $N_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N_v$, $f(v_p) > n$. Ainsi, pour tout $p \geqslant N_v$, on a $p \in I_n$. Cet ensemble est donc bien infini.

   b) D'après le cours et la question précédente, il existe une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_n$, *i.e.* $f(v_{\varphi(n)}) > n$.

6. Soit $B > 0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N'_u \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'_u$, $u_n > B$. De même, puisque $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe $N'_v \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'_v$, $v_n > B$.

   Soit $N = \max(N_u, N'_u, N'_v, 1)$. Alors on a
   - $f(u_N) < 0$ car $n \geqslant N_u$,
   - $u_N > B$ car $n \geqslant N'_u$,

   posons donc $a = u_N$ qui convient. On a également
   - $f(v_{\varphi(N)}) > N \geqslant 1$,
   - $v_{\varphi(N)} > B$ car $\varphi(N) \geqslant N \geqslant N'_v$,

   et posons donc $b = v_{\varphi(N)}$ qui convient.

7. Soit $B > 0$. D'après la question précédente, il existe $a, b > B$ tels que $f(a) < 0 < 1 < f(b)$, i.e $0 \in [f(a), f(b)]$. On a nécessairement $a \neq b$ puisque $f(a) \neq f(b)$. La fonction f est continue sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$ si $b > a$), donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ (ou $x \in [b, a]$ si $b > a$), donc $x > B$, tel que $f(x) = 0$.

8. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $B = n+1 > 0$, il existe $x > B$ tel que $f(x) = 0$ et posons alors $w_n = x$. On a ainsi une suite réelle $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > n + 1$, donc par passage à la limite dans l'inégalité w tend vers $+\infty$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(w_n) = 0$.

   La suite w répond donc à la question.

Exercice 3

Soient $D \subset \mathbb{R}$ non vide et $x_0 \in \overline{D}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que

$$x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D} \quad \text{et} \quad x_0 \in \overline{D\cap]x_0, x_0 + 1[}. \tag{1}$$

1. On suppose que f admet des limites à gauche et à droite en x_0 différentes. Montrer, uniquement à l'aide des définitions des limites, que f n'admet pas de limite finie en x_0.

2. On admet le résultat suivant

   Soient $h_1 : D \to \mathbb{R}$ et $h_2 : D \to \mathbb{R}$. Si $h_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h_2(x)$ et h_2 admet une limite à gauche (resp. à droite) en x_0 valant $\ell \in \mathbb{R}$, alors c'est aussi le cas de h_1.

   On suppose pour la suite que $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \{0\}$ et que pour tout $x \in D$, $f(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{\sin(x)}$.

   a) Montrer que $0 \in \overline{D}$.

b) Montrer que l'hypothèse (1) est satisfaite pour $x_0 = 0$.

c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$, 0, π ?

3. Bonus (hors barème) : démontrer la propriété admise dans la question 2. (pour seulement le cas de la limite à gauche) uniquement à l'aide des définitions.

Correction

1. Supposons par l'absurde que f admette une limite finie en x_0 et notons là $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
En particulier

— comme pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell$,

— comme pour tout $x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, on déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \ell$,

et donc les limites à gauche et à droite de f sont égales (valant ℓ). C'est absurde, donc f n'admet pas de limite de limite finie en x_0.

2. a) La suite $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de D, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \frac{1}{n+2} < \pi$, qui tend vers 0, donc par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a $0 \in \overline{D}$.

b) On a $]-1, 0[\cap D =]-1, 0[$ et la suite $\left(-\frac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $]-1, 0[$ qui tend vers 0, donc par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a $0 \in \overline{]-1, 0[\cap D}$.
De même $D \cap]0, 1[=]0, 1[$ et la suite $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $]0, 1[$ qui tend vers 0, donc par la caractérisation séquentielle de l'adhérence, on a $0 \in \overline{D \cap]0, 1[}$.

c) Prolongement en $-\frac{\pi}{2}$. On a $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$, donc f est prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$.

Prolongement en 0. On a $\ln(1 + |x|) \underset{x\to 0}{\sim} |x|$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{|x|}{x}$. Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{|x|}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$, donc grâce au résultat admis on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$. Et grâce à la question 1., on obtient que f n'admet pas de limite en 0.
Ainsi f n'est pas prolongeable par continuité en 0 (car sinon admettrait une limite finie en 0).
Prolongement en π. On a $\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = +\infty$, donc f n'est pas prolongeable par continuité en π.