Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Examen du 08/01/2025. Durée 2h ou 2h40 pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Soient A une partie bornée de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux éléments.

1. Montrer que $\inf(A) \neq \sup(A)$.

2. a) Donner un exemple d'un tel ensemble A tel que $\max(A)$ existe et $\sup(A \setminus \{\max(A)\}) = \sup(A)$ (on précisera seulement les valeurs de ces quantités sans les justifier).

   b) Donner un exemple d'un tel ensemble A tel que $\max(A)$ existe et $\sup(A \setminus \{\max(A)\}) \neq \sup(A)$ (on précisera seulement les valeurs de ces quantités sans les justifier).

Soit $x \in A$ et notons $B = A \setminus \{x\}$.

3. Montrer que si $x > \inf(A)$, alors $\inf(B) = \inf(A)$.

4. Montrer que la contraposée de l'implication de la question 3. se réécrit (est équivalente à) :

$$\inf(B) > \inf(A) \quad \Rightarrow \quad x = \inf(A).$$

5. La réciproque de l'implication de la question 3. est-elle vraie ?

6. Montrer que si $\inf(B) > \inf(A)$, alors A admet un minimum.

7. On suppose que $x = \inf(A)$ et $\inf(A) = \inf(B)$. Montrer alors que A n'est pas un ensemble fini.

Exercice 2

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui tendent vers $+\infty$, et soit $\ell < 0$. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = +\infty$.

1. Est-ce que la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$? Justifier.

2. La fonction f admet-elle une limite finie en $+\infty$? Justifier.

3. Tracer sur $\mathbb{R}_+$ l'allure du graphe d'une fonction respectant les hypothèses de l'énoncé. *Indication : on pourra supposer ici par exemple que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$ et $v_n = 2n + 1$.*

4. Montrer que la suite $f(u) = (f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négative à partir d'un certain rang.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \{p \in \mathbb{N} \,/\, f(v_p) > n\}$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est infini.

   b) Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(v_{\varphi(n)}) > n$.

6. Montrer que pour tout $B > 0$, il existe $a, b \in]B, +\infty[$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 1$.

7. En déduire que

$$\forall B > 0, \exists x > B, \ f(x) = 0.$$

8. En déduire qu'il existe une suite réelle w qui tend vers $+\infty$ et telle que $f(w)$ est la suite constante nulle.

Exercice 3

Soient $D \subset \mathbb{R}$ non vide et $x_0 \in \overline{D}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que

$$x_0 \in \overline{]x_0 - 1, x_0[\cap D} \quad \text{et} \quad x_0 \in \overline{D \cap]x_0, x_0 + 1[}. \tag{1}$$

1. On suppose que f admet des limites à gauche et à droite en x_0 différentes. Montrer, uniquement à l'aide des définitions des limites, que f n'admet pas de limite finie en x_0.

2. On admet le résultat suivant

   Soient $h_1 : D \to \mathbb{R}$ et $h_2 : D \to \mathbb{R}$. Si $h_1(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h_2(x)$ et h_2 admet une limite à gauche (resp. à droite) en x_0 valant $\ell \in \mathbb{R}$, alors c'est aussi le cas de h_1.

   On suppose pour la suite que $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[\setminus \{0\}$ et que pour tout $x \in D$, $f(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{\sin(x)}$.

   a) Montrer que $0 \in \overline{D}$.

   b) Montrer que l'hypothèse (1) est satisfaite pour $x_0 = 0$.

   c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $-\frac{\pi}{2}$, 0, π ?

3. Bonus (hors barème) : démontrer la propriété admise dans la question 2. (pour seulement le cas de la limite à gauche) uniquement à l'aide des définitions.