Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License 2ème année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Examen du 12/01/2024. Durée 2h ou 2h40 pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (4.5pt)

Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x\sin(x)}}{\tan(x)}$. Déterminer si f est continue ou prolongeable par continuité en x_0 lorsque

a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = \frac{\pi}{4}$, c) $x_0 = \frac{\pi}{2}$, d) $x_0 = \pi$.

On considère dans cet exercice la fonction tangente usuelle, non étendue par périodicité.

Correction.
La fonction tan est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $x\sin(x) > 0$. La fonction f est donc définie et continue sur $D_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$ comme quotient de fonctions continues (0.25pt).

a) La fonction f n'est pas définie en 0 (mais $0 \in \overline{D_f}$ car pour tout $\eta > 0$, $]-\eta, \eta[\cap D_f \neq \emptyset$ (+0.25pt)).
On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x}$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$. Les limites à gauche et à droite de f en 0 ne sont pas égales, donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0 (1.5pt).

En effet supposons par l'absurde que f est prolongeable par continuité en 0. Notons $\tilde{f}$ le prolongé. Alors $\tilde{f}$ est continue en 0. Comme par définition pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \tilde{f}(x) = f(0^-) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \tilde{f}(x) = f(0^+) = 1$. Mais comme $\tilde{f}$ est continue en 0, ses limites à gauche et à droite doivent être égales. Contradiction, d'où le résultat annoncé (1pt).

b) On a déjà vu que f est continue en $\frac{\pi}{4}$. (0.25pt)

c) La fonction f n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ (mais $\frac{\pi}{2} \in \overline{D_f}$ car pour tout $\eta > 0$, $]\frac{\pi}{2} - \eta, \frac{\pi}{2} + \eta[\cap D_f \neq \emptyset$ (+0.25pt)).
On a $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan(x)}$, or $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$. Ainsi, f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ par la valeur 0 (0.75pt).

d) π n'appartient pas à l'adhérence de $D_f \subset \mathbb{R}$. En effet, pour $\eta = \frac{\pi}{4}$, $V =]\pi - \eta, \pi + \eta[$ est un voisinage de π et $V \cap D_f = \emptyset$. Donc on ne peut considérer la limite de f en π et donc en particulier f n'est pas prolongeable par continuité en π (0.75pt).

Exercice 2 (11.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \underset{x\to-\infty}{o}(1)$ et $f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(1)$. On suppose de plus que $f(0) > 0$.

1. a) Dessiner, à titre d'exemple, le graphe d'une fonction satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.
 b) Montrer qu'il existe $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}f(0)$.
 c) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
 d) Placer les variables x_1, x_2 et c sur votre dessin (ou sur un nouveau dessin).

2. On suppose par l'absurde que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \neq 0$.
 a) Montrer que f' est injective. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*
 b) En déduire que f' est strictement monotone.
 c) On suppose que f' est strictement croissante. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \geqslant x_0$, $f'(x) \geqslant \alpha$.

d) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Que conclure ?

e) Étudier de manière similaire le cas où f' serait strictement décroissante.

f) Conclure.

Correction.
$11.5 = (0.5 + 2.5 + 0.75 + 0.5) + (1.5 + 0.75 + 1 + 2 + 1.5 + 0.5)$

1. a) On peut par exemple tracer le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ (0.5pt).

b) Comme $f(x) = \underset{x\to-\infty}{o}(1)$, on a en particulier que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et de même $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{4}f(0)$ alors $\varepsilon > 0$ et il existe donc $B_1 \in \mathbb{R}$ et $B_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t < B_1,\ f(t) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall t > B_2,\ f(t) < \varepsilon. \ (1pt)$$

Soit $t_1 < \min(B_1, 0)$, alors $\frac{1}{2}f(0) \in [f(t_1), f(0)]$. Et comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[t_1, 0]$. D'après le TVI, il existe donc $x_1 \in]t_1, 0[$ (en particulier $x_1 < 0$) tel que $f(x_1) = \frac{1}{2}f(0)$.

De même soit $t_2 > \max(B_2, 0)$, alors $\frac{1}{2}f(0) \in [f(t_2), f(0)]$, f est continue sur $[0, t_2]$, donc par le TVI il existe $x_2 \in]0, t_2[$ (en particulier $x_2 > 0$) tel que $f(x_2) = \frac{1}{2}f(0)$ (1.5pt).

c) Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$, puis $f(x_1) = f(x_2)$, donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c) = 0$ (0.75pt).

d) Dessin (0.5pt). Le point c doit correspondre graphiquement à un extremum local de la fonction. Par exemple pour $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$, on a nécessairement $c = 0$.

2. a) Si f' n'est pas injective, alors il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, tels que $f'(x_1) = f'(x_2)$. Or comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur $[x_1, x_2]$ et dérivable sur $]x_1, x_2[$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $d \in]x_1, x_2[$ tel que $f''(d) = 0$. Ceci contredit notre hypothèse. Donc f' est injective (1.5pt).

b) Comme f' est injective et continue, f' est strictement monotone d'après le théorème de la bijection (0.75pt).

c) On sait que $f'(c) = 0$ et f' strictement croissante, donc $f'(c+1) > f'(c) = 0$. Posons $\alpha = f'(c+1) > 0$ et $x_0 = c + 1$, alors comme f' est strictement croissante, pour tout $x \geqslant x_0$, $f'(x) \geqslant \alpha$ (1pt).

d) Soit $x' > x > x_0$. Comme f' est dérivable sur $]x, x'[$ et continue sur $[x, x']$ (car f' est dérivable sur $\mathbb{R}$), par le théorème des accroissement finis, il existe $t \in]x, x'[$ tel que $f(x') - f(x) = f'(t)(x' - x)$ et donc puisque $]x, x'[\subset [x_0, +\infty[$, on a $f(x') - f(x) \geqslant \alpha(x' - x)$ i.e. $f(x') \geqslant f(x) + \alpha(x' - x)$. Cette dernière égalité étant vraie pour tous $x, x' > x_0$, et comme $\alpha > 0$, en passant à la limite lorsque $x' \to +\infty$ dans l'inégalité, on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a une contradiction avec le fait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc f n'est pas strictement croissante (2pt).

e) Si f' est strictement décroissante, alors cette fois il existe $\alpha < 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f'(x) \leqslant \alpha$ pour tout $x \geqslant x_0$. Alors en appliquant le théorème des accroissements finis comme précédemment, on déduit que pour tout $x' > x \geqslant x_0$, on a $f(x') \leqslant f(x) + \alpha(x' - x)$. En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (1.5pt).

f) La précédente conclusion est donc de nouveau absurde avec le fait que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Dans tous les cas on tombe sur une contradiction. L'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) \neq 0,$$

est donc fausse, i.e. il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $f''(d) = 0$ (0.5pt).

Exercice 3 (6pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

1. Soit u une suite réelle.

a) Montrer que si u est non majorée, il existe une extractrice φ telle que $u_\varphi = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b) Montrer que si u est non minorée, alors $-u$ est non majorée.

c) En déduire que si u est non minorée, il existe une extractrice φ telle que u_φ tend vers $-\infty$.

2. Soit $M \geqslant 0$. On considère une suite réelle u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n)| \leqslant M$. Montrer que u admet une valeur d'adhérence.

Correction.
$6 = (1.75 + 0.75 + 0.5) + 3$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $I_n = \{k \in \mathbb{N} \,/\, u_k > n\}$. Si I_n est fini alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $u_k \leqslant n$ et donc u est majorée par $\max(u_0, \dots, u_{k_0-1}, n)$, ce qui est absurde. D'où I_n est infini (1pt).

   Il existe donc φ extractrice telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in I_n$ *i.e.* $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. Par passage à la limite dans l'inégalité, on déduit donc que u_φ tend vers $+\infty$ (0.75pt).

   b) Soit $M \in \mathbb{R}$, comme u est non minorée, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < -M$, donc $u_n > M$. Ainsi u est bien non majorée (0.75pt).

   c) D'après les questions précédentes, comme u est non minorée, $-u$ est non majorée et donc il existe φ extractrice telle que $-u_\varphi$ tend vers $+\infty$. Par opération sur les limites, on obtient que u_φ tend vers $-\infty$ (0.5pt).

2. Supposons par l'absurde que u n'est pas bornée, alors u n'est pas majorée ou u n'est pas minorée. Supposons que u n'est pas majorée, alors d'après ce qui précède il existe φ extractrice telle que u_φ tend vers $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty$, par la caractérisation séquentielle de la limite appliquée à la fonction $|f|$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(u_{\varphi(n)})| = +\infty$. Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f(u_n)| \leqslant M$, on a en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_{\varphi(n)})| \leqslant M$. Contradiction.

   Si u n'est pas minorée, alors il existe φ extractrice telle que u_φ tend vers $-\infty$. En utilisant cette fois que $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x)| = +\infty$, on déduit par la caractérisation séquentielle de la limite que $\lim\limits_{n \to +\infty} |f(u_{\varphi(n)})| = +\infty$ et on obtient de nouveau une contradiction (2.5pt).

   Ainsi u est bornée. Et par le théorème de Bolzano-Weierstrass, u admet une valeur d'adhérence (0.5pt).

Exercice 4 (3.5pt)

Soient u, v, $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \max(u_n, v_n)$. Montrer par deux méthodes différentes que la suite w tend vers ℓ.
Indications : on pourra utiliser, pour l'une des méthodes, la formule du maximum basée sur la moyenne.

Correction.
Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de u et montrons que w tend vers ℓ. Puisque $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, v tend aussi vers ℓ (0.5pt).
Méthode 1. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $N_u, N_v \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N_u,\ \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant N_v,\ \ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$$

Posons $N_w = \max(N_u, N_v)$, alors pour tout $n \geqslant N_w$, $u_n < \ell + \varepsilon$ et $v_n < \ell + \varepsilon$ donc $w_n = \max(u_n, v_n) < \ell + \varepsilon$. De même, pour tout $n \geqslant N_w$, $\ell - \varepsilon < u_n$ et $\ell - \varepsilon < v_n$ donc $w_n > \ell - \varepsilon$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant N_w,\ \ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon\,.$$

Autrement dit, w tend vers ℓ (2pt).
Méthode 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{u_n + v_n}{2} + \frac{|u_n - v_n|}{2}$. Par opération sur les limites, $\frac{u+v}{2}$ tend vers ℓ, $u - v$ tend vers 0 donc $|u - v|$ tend vers 0, et finalement w tend vers ℓ (1pt).
Remarque : si, par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ alors $w_n = 1 + \frac{1}{n}$ donc on n'a ni $w = u$, ni $w = v$.

Exercice 5 (6pt)

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que u est une suite de Cauchy. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'assertion implique que v est stationnaire, que v est une suite de Cauchy ou que v est convergente.

1.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant N,\ |u_p - v_n| < \varepsilon\,.$$

2.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant n,\ |u_p - v_n| < \varepsilon\,.$$

3.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ |u_p - v_n| < \varepsilon\,.$$

Correction.
$6 = 2.5 + 2 + 1.5$

D'après le cours, une suite est de Cauchy si et seulement si elle est convergente. Ainsi, d'une part, u converge (0.5pt), d'autre part, si on montre que v est convergente, alors v est de Cauchy (0.5pt). Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de u.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u tend vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant N_\varepsilon$, $|u_p - \ell| < \varepsilon$. Or d'après l'assertion donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geqslant N_\varepsilon$ tel que $|u_p - v_n| < \varepsilon$ d'où par inégalité triangulaire
$$|v_n - \ell| \leqslant |v_n - u_p| + |u_p - \ell| < 2\varepsilon\,.$$
On a ainsi montré que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |v_n - \ell| < 2\varepsilon\,,$$
donc v est la suite constante égale à ℓ donc est stationnaire et donc également convergente (et ainsi de Cauchy) (1.5pt).

2. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers ℓ, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall p \geqslant N_\varepsilon,\ |u_p - \ell| < \varepsilon\,.$$
Or d'après l'assertion donnée, pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$, il existe $p \geqslant N_\varepsilon$ tels que $u_p - v_n| < \varepsilon$. Ainsi, par inégalité triangulaire,
$$|v_n - \ell| \leqslant |v_n - u_p| + |u_p - \ell| < 2\varepsilon\,.$$
Ceci montre que v est convergente (donc également de Cauchy) (.75pt).

En revanche, v n'est pas nécessairement stationnaire. En effet, considérons par exemple : $u = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = u$. Ainsi v n'est pas stationnaire. Or les hypothèses de l'énoncé sont satisfaites puisque u est de Cauchy car est convergente et v satisfait l'assertion car pour $\varepsilon > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, en prenant $p = n$, on a bien $|u_p - v_n| = 0 < \varepsilon$ (1.25pt).

3. L'assertion ne garantit ni que v soit stationnaire, ni que v soit convergente. En effet, si u est une suite non constante, alors il existe $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$, tels que $u_p \neq u_q$ et la suite v définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{2n} = u_p$ et $v_{2n+1} = u_q$ satisfait l'assertion, mais n'est pas convergente (car admet deux valeurs d'adhérence u_p et u_q dintinctes). Elle n'est donc pas convergente (donc pas de Cauchy). Et par construction v n'est pas stationnaire (1.5pt).