Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

Examen du 12/01/2024. Durée 2h ou 2h40 pour les 1/3 temps.

Aucun document n'est autorisé. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (4.5pt)

Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x\sin(x)}}{\tan(x)}$. Déterminer si f est continue ou prolongeable par continuité en x_0 lorsque

a) $x_0 = 0$, b) $x_0 = \frac{\pi}{4}$, c) $x_0 = \frac{\pi}{2}$, d) $x_0 = \pi$.

On considère dans cet exercice la fonction tangente usuelle, non étendue par périodicité.

Exercice 2 (11.5pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to-\infty}{=} o(1)$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$. On suppose de plus que $f(0) > 0$.

1. a) Dessiner, à titre d'exemple, le graphe d'une fonction satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.
   b) Montrer qu'il existe $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{2}f(0)$.
   c) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
   d) Placer les variables x_1, x_2 et c sur votre dessin (ou sur un nouveau dessin).
2. On suppose par l'absurde que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \neq 0$.
   a) Montrer que f' est injective. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde.*
   b) En déduire que f' est strictement monotone.
   c) On suppose que f' est strictement croissante. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x \geqslant x_0$, $f'(x) \geqslant \alpha$.
   d) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Que conclure ?
   e) Étudier de manière similaire le cas où f' serait strictement décroissante.
   f) Conclure.

Exercice 3 (6pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$.

1. Soit u une suite réelle.
   a) Montrer que si u est non majorée, il existe une extractrice φ telle que $u_\varphi = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   b) Montrer que si u est non minorée, alors $-u$ est non majorée.
   c) En déduire que si u est non minorée, il existe une extractrice φ telle que u_φ tend vers $-\infty$.
2. Soit $M \geqslant 0$. On considère une suite réelle u telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n)| \leqslant M$. Montrer que u admet une valeur d'adhérence.

Exercice 4 (3.5pt)

Soient u, v, $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = \max(u_n, v_n)$. Montrer par deux méthodes différentes que la suite w tend vers ℓ.
Indications : on pourra utiliser, pour l'une des méthodes, la formule du maximum basée sur la moyenne.

Exercice 5 (6pt)
Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que u est une suite de Cauchy. Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'assertion implique que v est stationnaire, que v est une suite de Cauchy ou que v est convergente.

1.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant N,\ |u_p - v_n| < \varepsilon\,.$$

2.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geqslant n,\ |u_p - v_n| < \varepsilon\,.$$

3.
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ |u_p - v_n| < \varepsilon\,.$$