Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

License $2^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
Analyse 3

DM

À rendre dans vos TD respectifs en deuxième séance de la semaine du 11/12/23 pour les deux premiers exercices et en première séance de la semaine du 18/12/23 pour les deux derniers.

Exercice 1 (6pt)

Soient $f :]0,+\infty[\to]-1,1[$ et $g :]\frac{1}{2},+\infty[\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite à droite en 0 valant 1 et $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

1. Montrer que $1 \in \overline{D_g}$.

2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\eta[$, $f(x) > \frac{1}{2}$.

3. Montrer que $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} g\circ f(x) = +\infty$.

Correction.
6 = 1.5 + 1 + 3.5

1. Remarquons que $D_g =]\frac{1}{2},1[\cup]1,+\infty[$. Soit V un voisinage de 1, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V$ (0.5pt). Alors $1+\frac{\varepsilon}{2} \in V$ et $1+\frac{\varepsilon}{2} > 1$ donc $1+\frac{\varepsilon}{2} \in D_g$ d'où $V\cap D_g \neq \varnothing$ et $1 \in \overline{D_g}$ (1pt).

2. Comme $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$, pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\eta[\cap D_f =]0,\eta[$, $f(x) \in]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{3}{2}[$ d'où en particulier $f(x) > \frac{1}{2}$ (1pt).

3. Puisque $\mathrm{Im}\, f \subset]-1,1[$, on a, d'après la question précédente, pour tout $x \in]0,\eta[$, $f(x) \in]\frac{1}{2},1[$ donc $g\circ f$ est bien défini sur $]0,\eta[$ (0.5pt).
Soit $A > 1$, comme $\lim_{y\to 1} g(y) = +\infty$, il existe $\eta_g > 0$ tel que pour tout $x \in]1-\eta_g, 1+\eta_g[\cap D_g$ on a $g(y) > A$ (1pt).
Comme $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 1$, il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in]0,\eta'[\cap D_f =]0,\eta'[$, $f(x) \in]1-\eta_g, 1+\eta_g[$ (1pt).
Posons $\eta'' = \min(\eta,\eta') > 0$, alors pour tout $x \in]0,\eta''[$, on a $f(x) \in]\frac{1}{2},1[\subset D_g$ et $f(x) \in]1-\eta_g, 1+\eta_g[$, d'où $f(x) \in]1-\eta_g, 1+\eta_g[\cap D_g$. Ainsi pour tout $x \in]0,\eta''[$, $g(f(x)) > A$. On a bien montré que $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} g\circ f(x) = +\infty$ (1pt).

Exercice 2 (9.5pt)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est croissante, g décroissante et $\lim_{x\to+\infty} (g-f)(x) = 0$.
Les questions suivantes doivent être résolues uniquement à partir des définitions des limites.

1. Montrer que $f \leqslant g$.

2. Montrer que f tend vers $\sup\{f(x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$ en $+\infty$.

3. En déduire que f et g tendent vers la même limite en $+\infty$.

Correction.
9.5 = 3 + 4 + 2.5

1. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > g(x_0)$. Alors comme f est croissante et g décroissante, on a pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) - g(x) \geqslant f(x_0) - g(x_0) > 0$ (1pt).
Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(x_0) - g(x_0)) > 0$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} (g-f)(x) = 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > B$, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Donc on a
$$\forall x \geqslant \max(x_0, B), \quad f(x_0) - g(x_0) \leqslant f(x) - g(x) < \frac{1}{2}(f(x_0) - g(x_0)).$$
Absurde. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ (2pt).

2. Posons $F = \{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$. F est non vide (0.5pt).
D'après la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$. Or g est décroissante, donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant g(0)$. Puis f est croissante donc pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) \leqslant g(0)$. Ainsi on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(0)$, i.e. F est majoré (1pt). Ainsi par le théorème d'existence de la borne supérieure, F admet une borne supérieure. (0.5pt)

Notons la $S \in \mathbb{R}$. On souhaite donc montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = S$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe $y_0 \in F$ tel que $S - \varepsilon < y_0$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $y_0 = f(x_0)$ (1pt). Comme f est croissante, pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant f(x_0) > S - \varepsilon$. Enfin puisque S est un majorant de F, on obtient donc

$$\forall x \geqslant x_0, \quad S - \varepsilon < f(x) \leqslant S < S + \varepsilon. \ (1pt)$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = S$.

3. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = S$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > B$, $|f(x) - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $g - f$ tend vers 0 en $+\infty$, il existe $B' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > B'$, $|g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour tout $x > \max(B, B')$, on a par l'inégalité triangulaire $|g(x) - S| = |g(x) - f(x) + f(x) - S| \leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = S$ (2.5pt).

Exercice 3 (6pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Construire une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(u_n) = 1$. En déduire une suite v d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = 1$.
Construire de même une suite w d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(w_n) = -1$.
2. En déduire que f n'est pas continue en 0.
3. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que pour tout $\eta > 0$ et tout $y \in [-1, 1]$, il existe $x \in]0, \eta[$ tel que $f(x) = y$.
4. Tracer, sans justification, l'allure du graphe de f au voisinage de 0.

Correction.

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2(n+1)\pi$, $v_n = \frac{1}{u_n}$ et $w_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$. Les suites u, v et w satisfont bien les conditions demandées (1.5pt).
2. Si f était continue en 0, alors par la caractérisation séquentielle de la continuité, comme la suite v tend vers 0, on aurait $f(v) = (f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(0) = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = 1$, donc la suite $f(v)$ tend vers 1. Donc f n'est pas continue en 0 (1pt).

Méthode alternative : puisque v et w tendent vers 0 et que les suites $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites constantes valant respectivement 1 et -1, donc convergentes mais de limites différentes, on déduit de la caractérisation séquentielle de la limite que f n'admet pas de limite en 0. Par conséquent, f n'est pas continue en 0.

3. Soit $\eta > 0$. Par convergence des suites v et w vers 0, il existe N_v et N_w des entiers naturels tels que

$$\forall n \geqslant N_v, \ v_n \in]0, \eta[, \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant N_w, \ w_n \in]0, \eta[. \qquad (1pt)$$

Soit $n \geqslant \max(N_v, N_w)$. On a par définition des suites v et w, $v_n < w_n$. Alors f étant continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]0, \eta[$, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'intervalle $[v_n, w_n] \subset]0, \eta[$ assure que pour tout $y \in [-1, 1] = [f(w_n), f(v_n)]$, il existe $x \in [v_n, w_n] \subset]0, \eta[$ tel que $f(x) = y$ (1.5pt).

4. (1pt)

Exercice 4 (4pt)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx) = 0$.

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Indications : Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. *Montrer qu'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $|c - n| < 1$.
Montrer que pour tout $\eta > 0$, *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $|c - n\eta| < \eta$.

Correction.
(Bonus pour les indications : 1pt)
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant $|x - x'| < \eta$, on a $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. (.5pt)

Comme $(f(n\eta))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|f(n\eta)| < \varepsilon$. (.5pt)

Montrons maintenant que pour tout $x \geqslant N\eta$, $|f(x)| < 2\varepsilon$, *i.e.* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Soit $x \geqslant N\eta$, alors pour $n = E\left(\frac{x}{\eta}\right)$, on a par définition $n \leqslant \frac{x}{\eta} < n + 1$, i.e. $n\eta \leqslant x < n\eta + \eta$ d'où $0 \leqslant x - n\eta < \eta$. Par conséquent $|f(x) - f(n\eta)| < \varepsilon$. (2pt) De plus $N\eta \leqslant x < (n+1)\eta$, d'où $n + 1 > N$ i.e. $n \geqslant N$ et donc $|f(n\eta)| < \varepsilon$. Ainsi

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(n\eta)| + |f(n\eta)| < 2\varepsilon.$$

On a bien montré que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. (1pt)