Université Paris Cité
UFR de Mathématiques et Informatique

# License 2$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques et Applications
# ANALYSE 3

## DM

À rendre dans vos TD respectifs en deuxième séance de la semaine du 11/12/23 pour les deux premiers exercices et en première séance de la semaine du 18/12/23 pour les deux derniers.

### Exercice 1 (6pt)

Soient $f : ]0, +\infty[ \to ]-1, 1[$ et $g : ]\frac{1}{2}, +\infty[ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet une limite à droite en 0 valant 1 et $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$.

1. Montrer que $1 \in \overline{D_g}$.
2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in ]0, \eta[$, $f(x) > \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g \circ f(x) = +\infty$.

### Exercice 2 (9.5pt)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f$ est croissante, $g$ décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g - f)(x) = 0$.
*Les questions suivantes doivent être résolues uniquement à partir des définitions des limites.*

1. Montrer que $f \leqslant g$.
2. Montrer que $f$ tend vers $\sup\{f(x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$ en $+\infty$.
3. En déduire que $f$ et $g$ tendent vers la même limite en $+\infty$.

### Exercice 3 (6pt)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Construire une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(u_n) = 1$. En déduire une suite $v$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(v_n) = 1$.
   Construire de même une suite $w$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(w_n) = -1$.
2. En déduire que $f$ n'est pas continue en 0.
3. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que pour tout $\eta > 0$ et tout $y \in [-1, 1]$, il existe $x \in ]0, \eta[$ tel que $f(x) = y$.
4. Tracer, sans justification, l'allure du graphe de $f$ au voisinage de 0.

### Exercice 4 (4pt)

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(nx) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
*Indications : Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|c - n| < 1$.*
*Montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|c - n\eta| < \eta$.*